Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
23 Marzo 2006

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = x^2 e^{x-y}$$

con la condizione $y(1) = 1$. Verificare alla fine il risultato ottenuto.

2) Risolvere il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2} dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \ : 1 \le x^2 + y^2 \le 4x, \ |y| \le \sqrt{3}x\}$.

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\varphi \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y} dx + \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2} dy$$

dove

$$\varphi(t) = (t + \cos^2 t, \ 1 + \sin^2 t)$$

con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Svolgimento

1) Si tratta di una equazione a variabili separabili infatti

$$\frac{dy}{dx} = x^2 e^x e^{-y} \Leftrightarrow \frac{dy}{e^{-y}} = x^2 e^x dx \Leftrightarrow e^y dy = x^2 e^x dx.$$

Si ottiene quindi

$$e^y = x^2 e^x - 2\int x e^x dx \Leftrightarrow e^y = x^2 e^x - 2xe^x + 2\int e^x dx \Leftrightarrow e^y = (x^2 - 2x + 2)e^x + C$$

da cui

$$y = \log[(x^2 - 2x + 2)e^x + C].$$

Applicando la condizione iniziale si ha

$$y(1) = 1 = \log(e + C) \Leftrightarrow C + e = e \Leftrightarrow C = 0.$$

In conclusione la soluzione risulta

$$y = \log(x^2 - 2x + 2) + x.$$

2) Il dominio risulta compreso tra la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, la circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 2 e le rette $y = \pm\sqrt{3}x$. Passando in coordinate polari si ha

$$-\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3}, \quad 1 \le \varrho \le 4\cos t$$

dove le limitazioni di ϱ si ottengono scrivendo le equazioni delle circonferenze in coordinate polari. Si ha, considerando che la funzione e il dominio risultano simmetrici rispetto all'asse x, indicando con D_1 la parte del dominio contenuta nel primo quadrante e con D_1' il suo trasformato

$$\begin{aligned}
&\iint_D \frac{|y|}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 2\iint_{D_1} \frac{y}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 2\iint_{D_1'} \frac{\sin t}{\varrho^2} d\varrho dt \\
= \;& 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t \int_1^{4\cos t} \frac{1}{\varrho^2} d\varrho = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin t\left(1 - \frac{1}{4\cos t}\right)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sin t - \frac{1}{4}\tan t\right)dt \\
= \;& 2\left[\frac{1}{4}\log(\cos t) - \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 1 - \frac{1}{2}\log 2.
\end{aligned}$$

3) La curva si trova nell'insieme $x > 0$, $y > 0$ che é un convesso. Possiamo allora considerare la forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 y} dx + \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)}{xy^2} dy$$

e studiare la sua esattezza. Se scriviamo

$$X(x,y) = (\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2})(x^2+y^2),\ Y(x,y) = (\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2})(x^2+y^2)$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial y} &= (-\frac{3}{y^2} - \frac{1}{x^2})(x^2+y^2) + (\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2})2y \\ &= -\frac{3x^2}{y^2} - 1 - 3 - \frac{y^2}{x^2} + 6 - \frac{2y^2}{x^2} = 2 - \frac{3y^2}{x^2} - \frac{3x^2}{y^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial x} &= (-\frac{3}{x^2} - \frac{1}{y^2})(x^2+y^2) + (\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2})2x \\ &= -3 - \frac{3y^2}{x^2} - 1 - \frac{x^2}{y^2} + 6 - \frac{2x^2}{y^2} = 2 - \frac{3y^2}{x^2} - \frac{3x^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Quindi la forma differenziale lineare é esatta. Determiniamo allora una sua primitiva F.

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int X(x,y)dx = \int (\frac{3}{y} - \frac{y}{x^2})(x^2+y^2)dx \\ &= \int (\frac{3x^2}{y} + 3y - y - \frac{y^3}{x^2})dx = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + g(y). \end{aligned}$$

e ancora

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^3}{y^2} + 2x + \frac{3y^2}{x} + g'(y) = (\frac{3}{x} - \frac{x}{y^2})(x^2+y^2)$$

da cui

$$g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = k.$$

Le primitive sono allora

$$F(x,y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + k = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{xy} + k = \frac{(x^2+y^2)^2}{xy} + k.$$

L'integrale curvilineo é allora dato da

$$\begin{aligned} &\int_\varphi \frac{(3x^2-y^2)(x^2+y^2)}{x^2y}dx + \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}dy \\ &= F(\frac{\pi}{2}, 2) - F(1,1) = \frac{(\frac{\pi^2}{4}+4)^2}{\pi} - 4. \end{aligned}$$