Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
29 Giugno 2006

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y''' = \frac{6y'}{x^2}, \quad x > 0.$$

2) Risolvere il seguente integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \arctan y dx - xy dy$$

dove $\mathcal{C}$ è la curva che delimita il triangolo di vertici $(1,0)$, $(0,1)$ e $(0,-1)$ percorsa in senso antiorario.

3) Studiare i massimi e minimi della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

Svolgimento

1) Si tratta di un'equazione equidimensionale di Eulero. Infatti l'equazione puó essere riscritta nella forma

$$x^3y''' - 6xy' = 0.$$

Poniamo $x = e^z \leftrightarrow z = \log x$. Utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte otteniamo successivamente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}(\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}) = \frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz})$$

ed analogamente

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}[\frac{1}{x^2}(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz})] = \frac{1}{x^3}(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}).$$

Sostituendo si ottiene l'equazione a coefficienti costanti nella variabile indipendente z

$$y''' - 3y'' - 4y' = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono date da

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 4, \quad \lambda = -1.$$

Pertanto l'equazione a coefficienti costanti ammette l'integrale generale

$$C_1 + C_2e^{4z} + C_3e^{-z}$$

e quindi ponendo $z = \log x$ l'integrale generale dell'equazione di Eulero é dato da

$$y = C_1 + C_2x^4 + C_3\frac{1}{x}.$$

2) Applicando le formule di Green e indicato con T il triangolo dei vertici dati, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \arctan y dx - xy dy &= \int\int_T (-y - \frac{1}{1+y^2}) dxdy \\
&= -\int_0^1 dx \int_{x-1}^{-x+1} (y + \frac{1}{1+y^2}) dy = -\int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} + \arctan y\right]_{x-1}^{-x+1} \\
&= -\int_0^1 (\arctan(-x+1) - \arctan(x-1)) dx = 2\int_0^1 \arctan(x-1) dx \\
&= [2x\arctan(x-1)]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x}{1+(x-1)^2} dx = -2\int_0^1 \frac{x}{1+(x-1)^2} dx \\
&= -\int_0^1 \frac{2x-2}{1+(x-1)^2} dx - \int_0^1 \frac{2}{1+(x-1)^2} dx = \log 2 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3) La funzione é di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ e quindi i punti di massimo e di minimo sono da ricercare tra le soluzioni del sistema delle derivate parziali uguagliate a zero. Si ha quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y).$$

Si ottiene quindi il sistema

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro si ha $x^3 + y^3 = 0$ da cui $x = -y$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene

$$y = 0,\ y = \pm\sqrt{2}.$$

I punti critici sono pertanto

$$(0,0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Calcoliamo ora la matrice Hessiana. Si ha

$$f''_{xx} = 12x^2 - 4,\ f''_{xy} = 4 = f''_{yx},\ f''_{yy} = 12y^2 - 4$$

da cui

$$H(0,0) = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

mentre

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{vmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix} > 0.$$

Quindi, essendo $f''_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f''_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 20 > 0,$ i punti $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}),$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sono minimi relativi, mentre per il punto $(0,0)$ osserviamo che

$$f(x,x) = 2x^4 + 2 \geq 2 = f(0,0)$$

per ogni x e

$$f(x,-x) = 2(x^4 - 4x^2 + 1) \leq 2 = f(0,0)$$

per ogni x tale che $|x| \leq 2$. Pertanto $(0,0)$ risulta un punto sella.