**Università degli Studi di Perugia**
**Facoltà di Ingegneria**
**Corso di laurea in Ingegneria Civile**
**Prova scritta di Analisi Matematica IIA**
**3 Aprile 2006**

**Cognome** ______________________________ **Nome** ____________________

**Anno di corso**_____________ **Matricola**___________________________

**Votazione** _____________

---

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

**1)** Risolvere la seguente equazione differenziale

$$xy'' - 5y' + \frac{8}{x}y = x^2$$

con le condizioni $y(1) = 0,\ y'(1) = 1$.

**2)** Risolvere il seguente integrale doppio

$$\int\int_D |x| \cos y dxdy$$

dove $D$ è la parte del piano compresa tra $|x| \leq 1$ e $|y| \leq |1 - x^2|$.

**3)** Calcolare la lunghezza dell'arco di curva di equazione

$$y = \frac{1}{3}(2 + x^2)^{\frac{3}{2}},$$

congiungente i punti $(0, \frac{2}{3}\sqrt{2})$ e $(3, \frac{11}{3}\sqrt{11})$.

**Svolgimento**

**1)** Possiamo considerare $x > 0$. Moltiplicando per $x$ l'equazione differenziale si ha

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = x^3$$

che risulta un'equazione di Eulero. Consideriamo l'omogenea associata

$$x^2y'' - 5xy' + 8y = 0.$$

Ponendo $x = e^z$ si ottiene l'equazione a coefficienti costanti

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

la cui equazione caratteristica possiede le radici

$$\alpha = 2 \quad \alpha = 4.$$

Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea risulta

$$y = C_1e^{2z} + C_2e^{4z}$$

da cui

$$y = C_1x^2 + C_2x^4.$$

Determiniamo ora un integrale particolare. Consideriamo il Wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} x^2 & x^4 \\ 2x & 4x^3 \end{vmatrix}$$

Poiché $detW = 2x^5$ la matrice inversa risulta

$$W^{-1} = \frac{1}{2x^5}\begin{vmatrix} 4x^3 & -x^4 \\ -2x & x^2 \end{vmatrix}$$

Pertanto, normalizzando l'equazione si ha $y'' - \frac{5}{x}y' + \frac{8}{x^2}y = x$, da cui

$$v_1 = \int x(-\frac{1}{2x})dx = -\frac{1}{2}x$$

e

$$v_2 = \int x(\frac{1}{2x^3})dx = -\frac{1}{2x}.$$

In conclusione l'integrale particolare é dato da

$$\overline{y} = v_1y_1 + v_2y_2 = -x^3$$

e quindi l'integrale generale é dato da

$$y = C_1x^2 + C_2x^4 - x^3.$$

Determiniamo ora $C_1$ e $C_2$ imponendo le condizioni iniziali

$$y(1) = 0 = C_1 + C_2 - 1$$

e

$$y'(1) = 1 = 2C_1 + 4C_2 - 3.$$

Si ottiene

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 1.$$

La soluzione del problema di Cauchy risulta quindi

$$y = x^4 - x^3.$$

**2)** Poiché $|x| \leq 1$, $|1 - x^2| = 1 - x^2$ e quindi

$$x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Il dominio risulta allora normale rispetto all'asse $x$ quindi

$$D = \{(x, y) \in I\!R^2 : -1 \leq x \leq 1,\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}.$$

Si ha pertanto, posto

$$D_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0,\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

e

$$D_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

$$\iint_D |x| \cos y dx dy = \iint_{D_1} -x \cos y dx dy + \iint_{D_2} x \cos y dx dy$$

$$= \int_{-1}^{0} -x dx \int_{x^2-1}^{1-x^2} \cos y dy + \int_0^1 x dx \int_{x^2-1}^{1-x^2} \cos y dy$$

$$= \int_{-1}^{0} -x(\sin(1 - x^2) - \sin(x^2 - 1)) dx + \int_0^1 x(\sin(1 - x^2) - \sin(x^2 - 1)) dx$$

$$= \int_{-1}^{0} -2x \sin(1 - x^2) dx + \int_0^1 2x \sin(1 - x^2) dx = 2 - 2\cos 1.$$

**3)** Una parametrizzazione della curva risulta essere

$$x(t) = t, \quad y(t) = \frac{1}{3}(2 + t^2)^{3/2}$$

con $t \in [0, 3]$. Si ha che la lunghezza é data da

$$L = \int_0^3 \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \int_0^3 \sqrt{1 + t^2(2 + t^2)} dt$$

$$= \int_0^3 \sqrt{1 + 2t^2 + t^4} dt = \int_0^3 (t^2 + 1) dt = 12.$$