Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
8 Settembre 2004

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \cos x(-y(x) + \sin x) \\ \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

2) Calcolare il volume dell'ellissoide con semiassi a, b, c.

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{\tan^2 x + 3}{1 + y^2} dx$$

dove γ è la curva $y = \cos x$ che congiunge i punti $(0, 1)$ e $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Svolgimento

1) Si tratta di una equazione differenziale lineare infatti possiamo scrivere

$$y'(x) = -\cos x y(x) + \cos x \sin x.$$

Dalla formula risolutiva si ottiene

$$y(x) = e^{\int -\cos x dx}[\int e^{\int \cos x dx} \cos x \sin x dx + C] = e^{-\sin x}[\int e^{\sin x} \cos x \sin x dx + C].$$

Calcoliamo

$$\int e^{\sin x} \cos x \sin x dx$$

ponendo $\sin x = t$. Si ha

$$\begin{aligned} \int e^{\sin x} \cos x \sin x dx &= \int t e^t dt = t e^t - \int e^t dt \\ &= t e^t - e^t = \sin x e^{\sin x} - e^{\sin x}. \end{aligned}$$

In conclusione otteniamo

$$y(x) = e^{-\sin x}[\sin x e^{\sin x} - e^{\sin x} + C] = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}.$$

Dalla condizione iniziale inoltre si ha

$$y(0) = -1 + C = 0$$

da cui $C = 1$.

2) Indicando l'ellissoide con

$$E = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$$

si ha che Vol E $= \int \int \int_E dxdydz$.

Effettuando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} r = \dfrac{x}{a} \\ s = \dfrac{y}{b} \\ t = \dfrac{z}{c} \end{cases}$$

si ha

$$\begin{cases} x = ar \\ y = bs \\ z = ct \end{cases}$$

da cui lo Jacobiano risulta

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ \\ 0 & b & 0 \\ \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc.$$

Si ottiene

$$\int\int\int_E dxdydz = \int\int\int_S abcdrdsdt = abc\frac{4}{3}\pi$$

dove S è la sfera di centro l'origine e raggio 1.

3) Una parametrizzazione della curva è data da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \cos t \end{cases}$$

con $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Dalla definizione di integrale curvilineo si ha

$$\int_\gamma \frac{\tan^2 x + 3}{1 + y^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 3}{1 + \cos^2 t} dt.$$

Effettuando il cambiamento di variabili $z = \tan t$ si ha $dt = \frac{1}{1+z^2} dz$ e $\cos^2 t = \frac{1}{z^2+1}$ e quindi otteniamo

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 t + 3}{1 + \cos^2 t} dt &= \int_0^1 \frac{z^2 + 3}{1 + \frac{1}{z^2+1}} \frac{1}{z^2 + 1} dz \\ &= \int_0^1 \frac{z^2 + 3}{z^2 + 2} dz = 1 + \int_0^1 \frac{1}{1 + z^2} dz \\ &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$