Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
6 Luglio 2004

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = (y - x)xy$$

nel triangolo di vertici $(0, 0)$ $(1, 0)$ e $(0, 1)$.

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$x^2y'' + xy' - y = 1.$$

3) Calcolare la lunghezza del tratto di curva $y^2 = 4x^3$ compreso tra i punti $(0, 0)$ e $(2, 4\sqrt{2})$.

Svolgimento

1) Poichè la funzione risulta continua in un insieme compatto, dal Teorema di Weierstrass sicuramente esistono il massimo ed il minimo assoluti. Determiniamo i punti critici, si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2xy + y^2 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 2x^2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema del gradiente uguagliato a zero si ottiene come unica soluzione il punto $(0,0)$. La soluzione peró non si puó accettare in quanto il punto non é interno. Pertanto non ci sono punti critici all'interno del tringolo. Studiamo allora la frontiera che risulta composta dai lati del triangolo. I segmenti sono dati dai punti
$(x,0)$ con $0 \leq x \leq 1$
$(0,y)$ con $0 \leq y \leq 1$
$(x,1-x)$ con $0 \leq x \leq 1$. Nei primi due segmenti la funzione assume sempre il valore 0. Per quanto riguarda l'ultimo segmento si ha

$$f(x, 1-x) = 2x^3 - 3x^2 + x.$$

Dallo studio della derivata

$$f' = 6x^2 - 6x + 1$$

si ottengono i punti critici

$$x = 0, x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}, x = 1$$

e quindi i punti

$$(0,1), (\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}), (\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6})(1,0).$$

In conclusione si ha

$$f(1,0) = f(0,1) = 0,\ f(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{18},\ f((\frac{3+\sqrt{3}}{6}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

e quindi il massimo risulta e il minimo.

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti non costanti equidimensionale di Eulero. Studiamo l'omogenea associata

$$x^2y'' + xy' - y = 0.$$

Eseguendo la sostituzione $x = e^z$ si ottiene l'equazione differenziale a coefficienti costanti

$$y'' - y = 0$$

il cui integrale generale risulta

$$C_1 e^z + C_2 e^{-z}$$

cioé

$$C_1 x + C_2 \frac{1}{x}.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare del tipo

$$y(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

con il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana diventa

$$W = \begin{pmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

il cui determinante vale esattamente $-\frac{2}{x}$. Per cui si ottiene

$$v_1(x) = \int \frac{1}{2} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2x}$$

e

$$v_2(x) = -\int \frac{1}{2} dx = -\frac{1}{2} x.$$

Quindi un integrale particolare risulta essere

$$y(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\frac{1}{2x} x + \frac{1}{x}(-\frac{1}{2} x) = -1.$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(x) = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} - 1.$$

3) Una parametrizzazione della curva è data da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t^{3/2} \end{cases}$$

con $t \in [0,2]$. Dalla definizione di lunghezza di una curva si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1+9t}dt \\ &= \frac{1}{9}\int_0^2 9\sqrt{1+9t}dt = \frac{1}{9}\left[\frac{(1+9t)^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{9}\frac{2}{3}(19^{3/2}-1) = \frac{2}{27}(19\sqrt{19}-1). \end{aligned}$$