Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica II
5 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare l'integrale generale dell' equazione differenziale

$$y'' - \tan x\ y' + 2y = 0$$

con $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x^2y^2dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalle curve di equazioni $xy = 1,\ xy = 2,\ x = 2y,\ y = 2x.$

Svolgimento

1) La funzione é continua e derivabile in tutto il piano $\mathbb{R}^2$. Gli eventuali punti di massimo e minimo relativo sono allora da ricercare tra le soluzione del sistema $\nabla f = 0$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2 y$$

e l'unica soluzione é il punto $(0,0)$. Poiché $f(0,0) = 0$, considerando le restrizioni

$$f(x,x) = -2x^4 < 0$$

e

$$f(x,0) = x^4 > 0$$

si deduce che il punto é un punto sella.

2) Una soluzione é $y_1 = \sin x$. Una seconda soluzione si ottiene dalla

$$\begin{aligned} y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int \tan x dx}}{y_1^2} dx &= \sin x \int \frac{e^{-\log|\cos x|}}{\sin^2 x} dx = \sin x \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx \\ &= \sin x \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x \left(-\frac{1}{\sin x} + \int \frac{1}{\cos x} dx \right) \\ &= -1 + \sin x \log \frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$y = C_1 \sin x + C_2 \left(-1 + \sin x \log \frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2} \right).$$

3) Eseguiamo un cambiamento di variabile ponendo

$$xy = u, \ \frac{y}{x} = v.$$

Si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \ y = \sqrt{uv}.$$

Lo Jacobiano vale $\frac{1}{2v}$ e quindi si ha, ponendo $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 2, \frac{1}{2} \le v \le 2\}$

$$\begin{aligned} \int\int_D x^2 y^2 dxdy &= \int\int_{D'} u^2 \frac{1}{2v} dudv = \frac{1}{2} \int_1^2 u^2 du \int_{1/2}^2 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_1^2 [\log v]_{1/2}^2 = \frac{7}{3} \log 2. \end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
10 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 5x^2y^2$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare l'integrale generale dell' equazione differenziale

$$y'' - \tan x\ y' + 2y = 0$$

con $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D 3y^2x^2dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del primo quadrante delimitato dalle curve di equazioni $xy = 1,\ xy = 3,\ x = 3y,\ y = 3x.$

Svolgimento

1) La funzione é continua e derivabile in tutto il piano $I\!R^2$. Gli eventuali punti di massimo e minimo relativo sono allora da ricercare tra le soluzione del sistema $\nabla f = 0$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 10xy^2$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 10x^2y$$

e l'unica soluzione é il punto $(0,0)$. Poiché $f(0,0) = 0$, considerando le restrizioni

$$f(x,x) = -3x^4 < 0$$

e

$$f(x,0) = x^4 > 0$$

si deduce che il punto é un punto sella.

2) Una soluzione é $y_1 = \sin x$. Una seconda soluzione si ottiene dalla

$$\begin{aligned} y_2 = y_1 \int \frac{e^{\int \tan x dx}}{y_1^2} dx = \sin x \int \frac{e^{-\log|\cos x|}}{\sin^2 x} dx = \sin x \int \frac{1}{\cos x \sin^2 x} dx \\ = \quad \sin x \int \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x \left(-\frac{1}{\sin x} + \int \frac{1}{\cos x} dx \right) \\ = \quad -1 + \sin x \log \frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$y = C_1 \sin x + C_2 \left(-1 + \sin x \log \frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2} \right).$$

3) Eseguiamo un cambiamento di variabile ponendo

$$xy = u, \; \frac{y}{x} = v.$$

Si ottiene

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \; y = \sqrt{uv}.$$

Lo Jacobiano vale $\frac{1}{2v}$ e quindi si ha, ponendo $D' = \{(u,v) : 1 \le u \le 3, \frac{1}{3} \le v \le 3\}$

$$\begin{aligned} 3 \int\int_D x^2y^2 dxdy = 3 \int\int_{D'} u^2 \frac{1}{2v} dudv = \frac{3}{2} \int_1^3 u^2 du \int_{1/3}^3 \frac{1}{v} dv \\ = \quad \frac{3}{2} \left[\frac{1}{3} u^3 \right]_1^3 \; [\log v]_{1/3}^3 = 26 \log 3. \end{aligned}$$