UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 02.07.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Dato il campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = \left(xy, \frac{e^y}{y^2} + \frac{x^2}{2} \right)$$

determinare il lavoro compiuto lungo l'arco di circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 congiungente i punti $(-1,1)$ e $(1,1)$, contenuto nel semipiano $y > 0$ e percorso in senso orario.

2. Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_T \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dxdy$$

dove T é la parte di corona circolare contenuta nel primo quadrante e delimitata dalle circonferenze di centro l'origine e raggi 1 e 2.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{\cos^2 y'}{x^2} \\ y(1) = y'(1) = -\frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

(Suggerimento: abbassare l'ordine dell'equazione)

Svolgimento

1. La forma differenziale associata risulta chiusa. Inoltre nel semipiano $y > 0$ risulta anche esatta essendo convesso. Pertanto l'integrale che definisce il lavoro puó essere calcolato facilmente lungo il segmento γ che unisce i punti $(-1,1)$ e $(1,1)$. Tale segmento ha equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (t, 1), \quad t \in [-1, 1].$$

Risulta quindi:

$$\int_\gamma xydx + (\frac{e^y}{y^2} + \frac{x^2}{2})dy = \int_{-1}^{1} tdt = 0.$$

2. Passando in coordinate polari si ha che il nuovo insieme di integrazione risulta $T' = \{(\varrho, t) : \ 1 \le \varrho \le 2, \ 0 \le t \le \pi/2\}$. Pertanto otteniamo

$$\int\int_T \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dxdy = \int\int_{T'} \arcsin\left(\frac{\varrho \sin t}{\varrho}\right)\varrho d\varrho dt$$

$$= \int_1^2 \varrho d\varrho \int_0^{\pi/2} tdt = \frac{3\pi^2}{16}.$$

3. Posto $y' = z$ l'equazione diventa $z' = \dfrac{\cos^2 z}{x^2}$ che risulta a variabili separabili. Integrando si ha

$$\tan z = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow z = \arctan(-\frac{1}{x} + C).$$

Pertanto sostituendo il dato iniziale $y'(1) = z(1) = -\dfrac{\pi}{4}$, otteniamo $C = 0$. Quindi

$$y' = \arctan(-\frac{1}{x}) = -\arctan(\frac{1}{x})$$

e facilmente si ha

$$y = -\int \arctan(\frac{1}{x})dx = -x\arctan(\frac{1}{x}) - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$= -x\arctan(\frac{1}{x}) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + K.$$

Imponendo la condizione iniziale $y(1) = -\frac{\pi}{4}$, otteniamo immediatamente

$$K = \frac{1}{2}\log 2.$$