Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
29 Marzo 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale su insiemi compatti di $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(\frac{2x}{n})}{1 + nx^2}.$$

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D y \sqrt[3]{x^2 + y^2} dxdy$$

dove D é il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1 e al di sopra della retta $y = x$.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y + xy' = x \arctan(1 + x^2)$$

con $y(1) = -\log \sqrt[4]{5} + 2 \arctan 2.$

Svolgimento

1) Proviamo che la serie converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$, da cui discende subito la convergenza uniforme e puntuale.

Si ha

$$\left|\frac{1-\cos\left(\frac{2x}{n}\right)}{1+nx^2}\right| \leq \left|1-\cos\left(\frac{2x}{n}\right)\right| \simeq \frac{4x^2}{n^2} = f_n(x)$$

se $n \to \infty$. Sia $K \subset \mathbb{R}$ compatto. Poiché la funzione $f(x) = 4x^2$ é continua in K (infatti é continua in tutto $\mathbb{R}$), allora assume il valore massimo M in K. Allora si ha

$$f_n(x) \leq \frac{M}{n^2}.$$

Abbiamo maggiorato il termine generale della serie con il termine generale di una serie numerica che converge, da cui la serie converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$.

2) Utilizziamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$

Si ha che il dominio D si trasforma in

$$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\}.$$

Come al solito il determinante Jacobiano del cambio di variabili vale ρ, quindi

$$\iint_D y\sqrt[3]{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} \rho^{8/3}\sin\theta\, d\rho d\theta = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta\Big(\int_0^{2\cos\theta} \rho^{8/3}d\rho\Big)d\theta = \frac{9}{77}\sqrt[3]{2}.$$

3) Dobbiamo risolvere un' equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea del tipo $y' + a(x)y = b(x)$, per cui possiamo utilizzare la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-\int_0^x a(t)dt}\left\{c + \int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt\right\}, \qquad (*)$$

per trovare l'integrale generale della equazione differenziale.

Poiché il dato iniziale é la coppia $(1, -\ln\sqrt[4]{5} + 2\arctan 2)$, il nostro problema avrá una unica soluzione $y(x)$ definita "in piccolo" in un intervallo I del tipo

$[-\delta+1, 1+\delta] \times [-\gamma - \ln \sqrt[4]{5} + 2\arctan 2, \gamma - \ln \sqrt[4]{5} + 2\arctan 2]$, con $\delta < 1$. Possiamo quindi restringere la nostra discussione in I , e dividere entrambi i membri della equazione per x, cosí da ottenere

$$y' + \frac{y}{x} = \arctan(1+x^2).$$

Applicando la formula risolutiva $(*)$ con $a(x) = 1/x$ e $b(x) = \arctan(1+x^2)$ otteniamo

$$y(x) = \frac{1}{x}\left(c + \int_0^x t\arctan(1+t^2)dt\right) = \frac{c}{x} + \frac{x^2+1}{2x}\arctan(x^2+1) - \frac{1}{4x}\ln(1+(1+x^2)^2),$$

che é l'integrale generale della equazione. Sostituendo il dato iniziale si ottiene $c = \arctan 2$, il che determina univocamente la soluzione (in piccolo) del problema di Cauchy assegnato.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
29 Marzo 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale su insiemi compatti di $I\!R$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin^4(\frac{2x}{n})}{1+n^2x^4}.$$

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

dove D é il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1 ed esterna alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$y' - \frac{\sin x}{2(1-\cos x)} y = (1-\cos x)^{-1/2}$$

con $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Svolgimento

1) Proviamo che la serie converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$, da cui discende subito la convergenza uniforme e puntuale. In particolare si ha

$$\left|\frac{n^2 \sin^4\left(\dfrac{2x}{n}\right)}{1+n^2x^4}\right| \leq \left|n^2 \sin^4\left(\frac{2x}{n}\right)\right| \simeq \frac{(2x)^4}{n^2}$$

se $n \to \infty$. Pertanto la serie risulta maggiorata da una serie numerica convergente in ogni intervallo chiuso e limitato.

2) Utilizziamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},$$

Tale cambiamento di coordinate trasforma D in

$$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 2\sin\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta\}.$$

Si ha quindi

$$\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_{D'} \rho\cos\theta d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4} \cos\theta\Big(\int_{2\sin\theta}^{2\cos\theta} \rho d\rho\Big)d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3) Dobbiamo risolvere un' equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea del tipo $y' + a(x)y = b(x)$, per cui possiamo utilizzare la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-\displaystyle\int_0^x a(t)dt}\left\{c + \int_0^x b(t)e^{\displaystyle\int_0^t a(s)ds}dt\right\}, \qquad (*)$$

per trovare l'integrale generale della equazione differenziale.

Il problema di Cauchy ha una unica soluzione definita in piccolo in un intorno $I = [-\delta+\pi/2, \pi/2+\delta] \times [-\gamma+1, 1+\gamma]$, con $0 < \delta < \pi/2$. Applicando la formula risolutiva $(*)$, si ottiene

$$y(x) = e^{\ln(\sqrt{1-\cos x})}\left(c + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-\cos t}}dt\right) = \sqrt{1-\cos x}\left(c - \cot\frac{x}{2}\right),$$

che é l'integrale generale in I. Sostituendo il dato iniziale otteniamo $c = 2$.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
29 Marzo 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale su insiemi compatti di $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin^2(\frac{x}{\sqrt{n}}))(1-\cos(\frac{x}{\sqrt{n}}))}{1+n^2x^4}.$$

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$

dove D é il dominio del primo quadrante esterno alla circonferenza di centro $(1,0)$ e raggio 1 ed interno alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$y' - \frac{y}{(1-x^2)} - \sqrt{1+x} = 0$$

con $y(0) = -2/3$.

Svolgimento

1) Proviamo che la serie converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$, da cui discende subito la convergenza uniforme e puntuale.

$$\left|\frac{\sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)}{1+n^2x^4}\right| \leq \left|\sin^2\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \simeq \frac{x^4}{n^2}$$

se $n \to \infty$. La serie risulta quindi maggiorata da una serie numerica convergente.

2) Utilizziamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \tag{1}$$

Si ha che il dominio D si trasforma in

$$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2,\ 2\cos\theta \leq \rho \leq 2\sin\theta\}.$$

Si ha quindi

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = \iint_{D'} \rho\sin\theta d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi/2} \sin\theta\Big(\int_{2\cos\theta}^{2\sin\theta} \rho d\rho\Big)d\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3) Dobbiamo risolvere un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea del tipo $y' + a(x)y = b(x)$, per cui possiamo utilizzare la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-\int_0^x a(t)dt}\left\{c + \int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt\right\}, \tag{$*$}$$

per trovare l'integrale generale della equazione differenziale.

Il problema di Cauchy ha una unica soluzione definita in piccolo in un intervallo $I = [-\delta,\delta]\times[-\gamma-2/3, \gamma-2/3]$, con $0 < \delta < 1$. Applichiamo quindi la formula risolutiva, ottenendo l'integrale generale, definito su I, cioé

$$y(x) = e^{\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}}\left(c + \int_0^x \sqrt{1-t}dt\right) = C\sqrt{\frac{x+1}{1-x}} - \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1+x}.$$

Sostituendo il dato iniziale, si ottiene $c = 0$, da cui segue subito l'espressione della unica soluzione $y(x)$ del nostro problema di Cauchy in I.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
29 Marzo 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare la convergenza puntuale, uniforme e totale su insiemi compatti di $\mathbb{R}$ della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log^3(1 + \frac{e^x}{n})}{2 + n^2 x^2}.$$

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D x \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy$$

dove D é il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1 e al di sotto della retta $y = x$.

3) Risolvere il problema di Cauchy

$$y' - \frac{y}{\tan x} = \frac{1}{\cos x}$$

con $y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Svolgimento

1) Proviamo che la serie converge totalmente sui compatti di $\mathbb{R}$, da cui discende subito la convergenza uniforme e puntuale.

$$\left|\frac{n\ln^3\left(1+\frac{e^x}{n}\right)}{2+n^2x^2}\right| \leq \left|n\ln^3\left(1+\frac{e^x}{n}\right)\right| \simeq \frac{(e^x)^3}{n^2}$$

se $n \to \infty$. Pertanto la serie risulta maggiorata da una serie numerica convergente.

2) Utilizziamo il seguente cambiamento di coordinate:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases},$$

Il dominio D si trasforma in

$$D' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq \rho \leq 2\sin\theta\}.$$

Si ha quindi

$$\iint_D x\sqrt[3]{x^2+y^2}dxdy = \iint_{D'} \rho^{8/3}\cos\theta d\rho d\theta = \int_0^{\pi/4}\cos\theta\Big(\int_0^{2\sin\theta}\rho^{8/3}d\rho\Big)d\theta = \frac{9}{77}\sqrt[3]{2}$$

3) Dobbiamo risolvere un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea del tipo $y' + a(x)y = b(x)$, per cui possiamo utilizzare la formula risolutiva

$$y(x) = e^{-\int_0^x a(t)dt}\left\{c + \int_0^x b(t)e^{\int_0^t a(s)ds}dt\right\}, \qquad (*)$$

per trovare l'integrale generale della equazione differenziale.

Il problema di Cauchy ha una unica soluzione definita in un intervallo $I = [-\delta+\pi/4, \delta+\pi/4] \times [-\gamma+\sqrt{2}/2, \gamma+\sqrt{2}/2]$, con $0 < \delta < \pi/4$. Applichiamo quindi la formula risolutiva $(*)$ in I per trovare l'integrale generale della equazione, sempre definito in I,

$$y(x) = e^{\ln\sin x}\left(c + \int_0^x \frac{1}{\sin t\cos t}dt\right) = c\sin x + \sin x\ln(\tan x).$$

Sostituendo il dato iniziale, si ottiene la seguente unica soluzione (definita in piccolo su I) del problema di Cauchy,

$$y(x) = \sin x(1 + \ln(\tan x))$$