Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Trovare una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(x) > 0$ tale che la forma differenziale lineare

$$\omega = xf(x)y^2dx - y\log f(x)dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare la funzione potenziale che si annulla in $(0,1)$. Si calcoli poi

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ é una curva generalmente regolare qualsiasi che congiunge $A = (0,1)$ e $B = (1,2)$ orientata da A a B.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 2,\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{2}x.$

Svolgimento

1) Poiché $f \in C^1(I\!R)$ le funzioni $X = xf(x)y^2$ e $Y = -y\log f(x)$ sono di classe $C^1(I\!R^2)$ che é un insieme convesso. Pertanto é sufficiente imporre che la forma sia chiusa cioé

$$X'_y = Y'_x.$$

Deve allora risultare

$$2yxf(x) = -y\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Questo é immediato nei punti del tipo $(x,0)$ mentre se $y \neq 0$ la funzione f deve verificare la condizione

$$2xf(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow 2x = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Integrando otteniamo

$$x^2 + K = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+K}$$

e poiché $f \in C^1(I\!R)$ dovrá risultare $K > 0$. Ponendo per esempio $K = 1$ la forma differenziale diventa

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2+1}dx - y\log\frac{1}{x^2+1}dy.$$

Per calcolare il potenziale F scriviamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2+1}$$

da cui

$$F = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + g(y)$$

ed essendo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y\log(x^2+1) + g'(y) = -y\log\frac{1}{x^2+1}$$

si ricava

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = C$$

e quindi

$$F(x,y) = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0,1)$ si ottiene facilmente $C = 0$.

Per calcolare l'integrale richiesto, é sufficiente applicare la formula:

$$\int_\gamma \omega = F(1,2) - F(0,1) = 2\log 2.$$

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+4y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 2 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 2x}{2}\frac{1}{\cos 2x}dx = \frac{1}{4}\log|\cos 2x|$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 2x}{2}\frac{1}{\cos 2x}dx = \frac{x}{2}.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{4}\log|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\log|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{2}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy = \frac{1}{2}\int\!\!\int_{D'}\frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{1-u^2}du\int_1^2\sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)du \\
&= \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\left[\log(1+u)-\log(1-u)\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\log 3}{3}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Trovare una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(x) > 0$ tale che la forma differenziale lineare

$$\omega = xf(x)y^2dx - y\log f(x)dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare la funzione potenziale che si annulla in $(0,1)$. Si calcoli poi

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ é una curva generalmente regolare qualsiasi che congiunge $A = (0,1)$ e $B = (1,2)$ orientata da A a B.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \dfrac{1}{\cos 3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 2$, $x^2 - y^2 = 3$, $y = -\frac{1}{3}x$, $y = \frac{1}{3}x$.

Svolgimento

1) Poiché $f \in C^1(I\!R)$ le funzioni $X = xf(x)y^2$ e $Y = -y \log f(x)$ sono di classe $C^1(I\!R^2)$ che é un insieme convesso. Pertanto é sufficiente imporre che la forma sia chiusa cioé

$$X'_y = Y'_x.$$

Deve allora risultare

$$2yxf(x) = -y\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Questo é immediato nei punti del tipo $(x,0)$ mentre se $y \neq 0$ la funzione f deve verificare la condizione

$$2xf(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow 2x = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Integrando otteniamo

$$x^2 + K = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2+K}$$

e poiché $f \in C^1(I\!R)$ dovrá risultare $K > 0$. Ponendo per esempio $K = 1$ la forma differenziale diventa

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2+1}dx - y\log\frac{1}{x^2+1}dy.$$

Per calcolare il potenziale F scriviamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2+1}$$

da cui

$$F = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + g(y)$$

ed essendo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y\log(x^2+1) + g'(y) = -y\log\frac{1}{x^2+1}$$

si ricava

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = C$$

e quindi

$$F(x,y) = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0,1)$ si ottiene facilmente $C = 0$. Per calcolare l'integrale richiesto, é sufficiente applicare la formula:

$$\int_\gamma \omega = F(1,2) - F(0,1) = 2\log 2.$$

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+9y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 3 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 3x}{3}\frac{1}{\cos 3x}dx = \frac{1}{9}\log|\cos 3x|$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 3x}{3}\frac{1}{\cos 3x}dx = \frac{x}{3}.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{9}\log|\cos 3x|\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\log|\cos 3x|\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{3}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy &= \frac{1}{2}\iint_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/3}^{1/3}\frac{1}{1-u^2}du\int_2^3 \sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\int_{-1/3}^{1/3}\frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\int_{-1/3}^{1/3}\left(\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)du \\
&= \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\left[\log(1+u)-\log(1-u)\right]_{-1/3}^{1/3} \\
&= \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/3}^{1/3} = \frac{\log 2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Trovare una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(x) > 0$ tale che la forma differenziale lineare

$$\omega = xf(x)y^2dx - y\log f(x)dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare la funzione potenziale che si annulla in $(0, 1)$. Si calcoli poi

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ é una curva generalmente regolare qualsiasi che congiunge $A = (0, 1)$ e $B = (1, 2)$ orientata da A a B.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x} \\ y(\frac{\pi}{4}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{4}) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt[3]{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 3,\ x^2 - y^2 = 4,\ y = -\frac{1}{4}x,\ y = \frac{1}{4}x.$

Svolgimento

1) Poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ le funzioni $X = xf(x)y^2$ e $Y = -y\log f(x)$ sono di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ che é un insieme convesso. Pertanto é sufficiente imporre che la forma sia chiusa cioé

$$X'_y = Y'_x.$$

Deve allora risultare

$$2yxf(x) = -y\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Questo é immediato nei punti del tipo $(x, 0)$ mentre se $y \neq 0$ la funzione f deve verificare la condizione

$$2xf(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow 2x = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Integrando otteniamo

$$x^2 + K = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + K}$$

e poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ dovrá risultare $K > 0$. Ponendo per esempio $K = 1$ la forma differenziale diventa

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2+1}dx - y\log\frac{1}{x^2+1}dy.$$

Per calcolare il potenziale F scriviamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2+1}$$

da cui

$$F = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + g(y)$$

ed essendo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y\log(x^2+1) + g'(y) = -y\log\frac{1}{x^2+1}$$

si ricava

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = C$$

e quindi

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2}\log(x^2+1) + C.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0, 1)$ si ottiene facilmente $C = 0$.

Per calcolare l'integrale richiesto, é sufficiente applicare la formula:

$$\int_\gamma \omega = F(1, 2) - F(0, 1) = 2\log 2.$$

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+4y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 2 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 2x}{2} \frac{1}{\sin 2x} dx = -\frac{x}{2}$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 2x}{2} \frac{1}{\sin 2x} dx = \frac{1}{4} \log |\sin 2x|.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \log |\sin 2x| \sin 2x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \log |\sin 2x| \sin 2x - \frac{x}{2} \cos 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{\pi-4}{4}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy = \frac{1}{2} \iint_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2} dudv$$
$$= \frac{1}{2} \int_{-1/4}^{1/4} \frac{1}{1-u^2} du \int_3^4 \sqrt{v} dv = \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3}) \int_{-1/4}^{1/4} \frac{1}{1-u^2} du$$
$$= \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3}) \int_{-1/4}^{1/4} \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \right) du$$
$$= \frac{1}{6}(8-3\sqrt{3}) \left[\log(1+u) - \log(1-u)\right]_{-1/4}^{1/4}$$
$$= \frac{1}{6}(8-3\sqrt{3}) \left[\log \frac{1+u}{1-u} \right]_{-1/4}^{1/4} = \frac{\log 5/3}{3}(8-3\sqrt{3}).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Edile-Architettura
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Trovare una funzione $f \in C^1(\mathbb{R})$ con $f(x) > 0$ tale che la forma differenziale lineare

$$\omega = xf(x)y^2dx - y\log f(x)dy$$

sia esatta in $\mathbb{R}^2$ e calcolare la funzione potenziale che si annulla in $(0,1)$. Si calcoli poi

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ é una curva generalmente regolare qualsiasi che congiunge $A = (0,1)$ e $B = (1,2)$ orientata da A a B.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x} \\ y(\frac{\pi}{6}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{6}) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt[3]{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 4,\ x^2 - y^2 = 5,\ y = -\frac{1}{5}x,\ y = \frac{1}{5}x.$

Svolgimento

1) Poiché $f \in C^1(I\!R)$ le funzioni $X = xf(x)y^2$ e $Y = -y \log f(x)$ sono di classe $C^1(I\!R^2)$ che é un insieme convesso. Pertanto é sufficiente imporre che la forma sia chiusa cioé

$$X'_y = Y'_x.$$

Deve allora risultare

$$2yxf(x) = -y\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Questo é immediato nei punti del tipo $(x, 0)$ mentre se $y \neq 0$ la funzione f deve verificare la condizione

$$2xf(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} \Leftrightarrow 2x = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}.$$

Integrando otteniamo

$$x^2 + K = \frac{1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + K}$$

e poiché $f \in C^1(I\!R)$ dovrá risultare $K > 0$. Ponendo per esempio $K = 1$ la forma differenziale diventa

$$\omega = \frac{xy^2}{x^2 + 1}dx - y \log \frac{1}{x^2 + 1}dy.$$

Per calcolare il potenziale F scriviamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{xy^2}{x^2 + 1}$$

da cui

$$F = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + 1) + g(y)$$

ed essendo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y \log(x^2 + 1) + g'(y) = -y \log \frac{1}{x^2 + 1}$$

si ricava

$$g'(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = C$$

e quindi

$$F(x, y) = \frac{y^2}{2} \log(x^2 + 1) + C.$$

Imponendo il passaggio per il punto $(0, 1)$ si ottiene facilmente $C = 0$.

Per calcolare l'integrale richiesto, é sufficiente applicare la formula:

$$\int_\gamma \omega = F(1, 2) - F(0, 1) = 2 \log 2.$$

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+9y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 3 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 3x}{3} \frac{1}{\sin 3x} dx = -\frac{x}{3}$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 3x}{3} \frac{1}{\sin 3x} dx = \frac{1}{9} \log |\sin 3x|.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \log |\sin 3x| \sin 3x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9} \log |\sin 3x| \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{\pi-6}{9}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2} \frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy &= \frac{1}{2} \iint_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2} dudv \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1/5}^{1/5} \frac{1}{1-u^2} du \int_4^5 \sqrt{v} dv = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8) \int_{-1/5}^{1/5} \frac{1}{1-u^2} du \\
&= \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8) \int_{-1/5}^{1/5} \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)} \right) du \\
&= \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-8) \left[\log(1+u) - \log(1-u)\right]_{-1/5}^{1/5} \\
&= \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-8) \left[\log \frac{1+u}{1-u} \right]_{-1/5}^{1/5} = \frac{\log 3/2}{3}(5\sqrt{5}-8).
\end{aligned}$$