Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Sia D il disco unitario di centro il punto $(0,0)$. Calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma (3e^{x^3} - y)dx + (x + 4e^{y^4})dy$$

e

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

dove γ é la frontiera di D.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 1,\ x^2 - y^2 = 2,\ y = -\frac{1}{2}x,\ y = \frac{1}{2}x$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda il primo integrale possiamo applicare le formule di Green e ottenere

$$\int_\gamma (3e^{x^3} - y)dx + (x + 4e^{y^4})dy = \int\int_D 2dxdy = 2\pi.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale non sono soddisfatte le ipotesi delle formule di Green. La forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

é il classico esempio di forma differenziale chiusa non esatta e parametrizzando la curva si ottiene facilmente 2π.

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+4y = 0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 2 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 2x}{2}\frac{1}{\cos 2x}dx = \frac{1}{4}\log|\cos 2x|$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 2x}{2}\frac{1}{\cos 2x}dx = \frac{x}{2}.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{4}\log|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4}\log|\cos 2x|\cos 2x + \frac{x}{2}\sin 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{2}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
&\iint_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy = \frac{1}{2}\iint_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-u^2}du \int_1^2 \sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right) du \\
&= \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\left[\log(1+u)-\log(1-u)\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{1}{6}(2\sqrt{2}-1)\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\log 3}{3}(2\sqrt{2}-1).
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Sia D il disco unitario di centro il punto $(0,0)$. Calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma (2\log(1+x^2)-y)dx+(x+4\log(1+y^4))dy$$

e

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

dove γ é la frontiera di D.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''+9y=\dfrac{1}{\cos 3x} \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x>0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2-y^2=2,\ x^2-y^2=3,\ y=-\frac{1}{3}x,\ y=\frac{1}{3}x$.

Svolgimento

1) Per quanto riguarda il primo integrale possiamo applicare le formule di Green e ottenere

$$\int_\gamma (2\log(1+x^2)-y)dx+(x+4\log(1+y^4))dy = \int\int_D 2dxdy = 2\pi.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale non sono soddisfatte le ipotesi delle formule di Green. La forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

é il classico esempio di forma differenziale chiusa non esatta e parametrizzando la curva si ottiene facilmente 2π.

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+9y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 3 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 3x}{3}\frac{1}{\cos 3x}dx = \frac{1}{9}\log|\cos 3x|$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 3x}{3}\frac{1}{\cos 3x}dx = \frac{x}{3}.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{9}\log|\cos 3x|\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{9}\log|\cos 3x|\cos 3x + \frac{x}{3}\sin 3x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_1 = 0$ e $C_2 = \frac{1}{3}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2-y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
&\int\int_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/3}^{1/3} \frac{1}{1-u^2}du \int_2^3 \sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\int_{-1/3}^{1/3} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\int_{-1/3}^{1/3} \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right) du \\
&= \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\left[\log(1+u) - \log(1-u)\right]_{-1/3}^{1/3} \\
&= \frac{1}{6}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/3}^{1/3} = \frac{\log 2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso ______________ **Matricola** ____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Sia D il disco unitario di centro il punto $(0,0)$. Calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma (3\sin^3 x - y)dx + (x + 4\cos^4 y)dy$$

e

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

dove γ é la frontiera di D.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x} \\ y(\frac{\pi}{4}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{4}) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt[3]{x^2-y^2}\,dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 3,\ x^2 - y^2 = 4,\ y = -\frac{1}{4}x,\ y = \frac{1}{4}x.$

Svolgimento

1) Per quanto riguarda il primo integrale possiamo applicare le formule di Green e ottenere

$$\int_\gamma (3\sin^3 x - y)dx + (x + 4\cos^4 y)dy = \int\int_D 2dxdy = 2\pi.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale non sono soddisfatte le ipotesi delle formule di Green. La forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

é il classico esempio di forma differenziale chiusa non esatta e parametrizzando la curva si ottiene facilmente 2π.

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+4y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 2 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 2x}{2}\frac{1}{\sin 2x}dx = -\frac{x}{2}$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 2x}{2}\frac{1}{\sin 2x}dx = \frac{1}{4}\log|\sin 2x|.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{4}\log|\sin 2x|\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\log|\sin 2x|\sin 2x - \frac{x}{2}\cos 2x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{\pi-4}{4}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
&\int\int_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int\int_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/4}^{1/4} \frac{1}{1-u^2}du \int_3^4 \sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3})\int_{-1/4}^{1/4} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(8-3\sqrt{3})\int_{-1/4}^{1/4}\left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right)du \\
&= \frac{1}{6}(8-3\sqrt{3})\left[\log(1+u) - \log(1-u)\right]_{-1/4}^{1/4} \\
&= \frac{1}{6}(8-3\sqrt{3})\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/4}^{1/4} = \frac{\log 5/3}{3}(8-3\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
28 Febbraio 2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Sia D il disco unitario di centro il punto $(0,0)$. Calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma (4\cos^4 x - y)dx + (x + 3\sin^3 y)dy$$

e

$$\int_\gamma \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

dove γ é la frontiera di D.

2) Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin 3x} \\ y(\frac{\pi}{6}) = 0 \\ y'(\frac{\pi}{6}) = 1. \end{cases}$$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \sqrt[3]{x^2 - y^2}dxdy$$

dove D è il sottoinsieme del semipiano $x > 0$ delimitato dalle curve di equazioni $x^2 - y^2 = 4,\ x^2 - y^2 = 5,\ y = -\frac{1}{5}x,\ y = \frac{1}{5}x.$

Svolgimento

1) Per quanto riguarda il primo integrale possiamo applicare le formule di Green e ottenere

$$\int_\gamma (4\cos^4 x - y)dx + (x + 3\sin^3 y) = \int\int_D 2dxdy = 2\pi.$$

Per quanto riguarda il secondo integrale non sono soddisfatte le ipotesi delle formule di Green. La forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

é il classico esempio di forma differenziale chiusa non esatta e parametrizzando la curva si ottiene facilmente 2π.

2) Calcoliamo l'integrale generale dell'equazione omogenea associata $y''+9y=0$. Si ha immediatamente

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Il determinante della matrice Wronskiana é uguale a 3 mentre le funzioni v_1 e v_2 sono date da

$$v_1 = \int -\frac{\sin 3x}{3}\frac{1}{\sin 3x}dx = -\frac{x}{3}$$

e

$$v_2 = \int \frac{\cos 3x}{3}\frac{1}{\sin 3x}dx = \frac{1}{9}\log|\sin 3x|.$$

Una soluzione particolare é quindi data da

$$\overline{y} = \frac{1}{9}\log|\sin 3x|\sin 3x - \frac{x}{3}\cos 3x.$$

La soluzione generale é quindi data da

$$y = C_1\cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{1}{9}\log|\sin 3x|\sin 3x - \frac{x}{3}\cos 3x.$$

Imponendo le condizioni iniziali si ha immediatamente $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{\pi-6}{9}$.

3) Eseguiamo il cambiamento di variabili

$$\frac{y}{x} = u, \quad x^2 - y^2 = v.$$

Da queste si ottiene

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Lo jacobiano vale

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{1-u^2}.$$

Pertanto , tenendo conto che nel dominio trasformato $1-u^2$ é positivo, si ha

$$\begin{aligned}
&\int\!\!\int_D \sqrt{x^2-y^2}dxdy = \frac{1}{2}\int\!\!\int_{D'} \frac{\sqrt{v}}{1-u^2}dudv \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1/5}^{1/5} \frac{1}{1-u^2}du \int_4^5 \sqrt{v}dv = \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)\int_{-1/5}^{1/5} \frac{1}{1-u^2}du \\
&= \frac{1}{3}(5\sqrt{5}-8)\int_{-1/5}^{1/5} \left(\frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}\right) du \\
&= \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-8)\left[\log(1+u) - \log(1-u)\right]_{-1/5}^{1/5} \\
&= \frac{1}{6}(5\sqrt{5}-8)\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_{-1/5}^{1/5} = \frac{\log 3/2}{3}(5\sqrt{5}-8).
\end{aligned}$$