Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
26 Giugno 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = |y|(x+y-\pi).$$

Esistono massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}^2$?

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{1+x^2+\pi y^2}dxdy$$

dove D é la parte interna all'ellisse di centro l'origine e di semiassi 1 e $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ rispetto agli assi x e y rispettivamente.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\sqrt{2}}{x^2}y = \frac{\cos(\sqrt[4]{2}\log x)}{x^2} \quad x > 0.$$

Svolgimento

1) La funzione é definita su tutto il piano $I\!R^2$. I punti del tipo $y = 0$ sono da studiare a parte perché annullano il valore assoluto e quindi si deve controllare la derivabilitá.

Discutendo il modulo si ottiene

$$f(x, y) = y(x + y - \pi) \quad y \geq 0$$

e

$$f(x, y) = -y(x + y - \pi) \quad y < 0.$$

Calcolando il gradiente nei punti $y > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - \pi$$

da cui si ottiene la soluzione $(\pi, 0)$ che non puó essere accettata. La stessa cosa succede per i punti $y < 0$.

A questo punto non rimane che studiare i punti $y = 0$. A tale scopo lo studio del segno della funzione si rivela decisivo. Infatti si ha che f é nulla nei punti delle rette $y = 0$ e $y = -x+\pi$, positiva nei punti del tipo $y > -x+\pi$ negativa altrove. Si ottiene allora che i punti $(x, 0)$ con $x < \pi$ sono punti di massimo, i punti $(x, 0)$ con $x > \pi$ sono punti di minimo e il punto $(\pi, 0)$ é un punto sella. La funzione non ammette massimo e minimo assoluti poiché ad esempio la restrizione ai punti dell'asse y fornisce

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(0, y) = \pm\infty.$$

2) Operando il cambiamento di variabili $x = \varrho \cos t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \varrho \sin t$ si ottiene $D' = \{(\varrho, t) : 0 \leq \varrho \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 2\pi\}$, infatti il dominio $x^2 + \pi y^2 \leq 1$ diventa

$$\varrho^2 \cos^2 t + \varrho^2 \pi \frac{1}{\pi} \sin^2 t \leq 1 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 1.$$

Poiché lo Jacobiano vale $J = \dfrac{\varrho}{\sqrt{\pi}}$ si ha

$$\iint_D \frac{1}{1 + x^2 + \pi y^2} dxdy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\int_{D'} \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho \int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}} [\log(1 + \varrho^2)]_0^1 = \sqrt{\pi} \log 2.$$

3) Si tratta di un'equazione differenziale equidimensionale di Eulero, infatti moltiplicando per x^2 diventa

$$x^2y'' + xy' + \sqrt{2}y = \cos(\sqrt[4]{2}\log x) \quad x > 0.$$

Posto $x = e^t \leftrightarrow \log x = t$ si ha

$$y''(t) + \sqrt{2}y(t) = \cos(\sqrt[4]{2}t).$$

Considerando l'equazione omogenea associata $y'' + \sqrt{2}y = 0$ si ottiene che l'equazione caratteristica é data da $\lambda^2 + \sqrt{2} = 0$ da cui $\lambda = \pm i\sqrt[4]{2}$. Le soluzioni sono allora $y = \cos(\sqrt[4]{2}t)$, $y = \sin(\sqrt[4]{2}t)$ e l'integrale generale risulta essere

$$C_1\cos(\sqrt[4]{2}t) + C_2\sin(\sqrt[4]{2}t).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché $\sqrt[4]{2}i$ é soluzione dell'equazione caratteristica si devono cercare soluzioni del tipo

$$y = At\cos(\sqrt[4]{2}t) + Bt\sin(\sqrt[4]{2}t).$$

Eseguendo le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $A = 0$ e $B = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$. La soluzione particolare é allora data da

$$y(t) = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}t\sin(\sqrt[4]{2}t)$$

cioé

$$y(x) = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\log x\sin(\sqrt[4]{2}\log x).$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$Y(x) = C_1\cos(\sqrt[4]{2}\log x) + C_2\sin(\sqrt[4]{2}\log x) + \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}\log x\sin(\sqrt[4]{2}\log x).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
26 Giugno 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ______________________

Anno di corso ______________ **Matricola** ____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = |x|(x + y + \sqrt{2}).$$

Esistono massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}^2$?

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{1 + \pi x^2 + 2y^2} dxdy$$

dove D é la parte interna all'ellisse di centro l'origine e di semiassi $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}$ rispetto agli assi x e y rispettivamente.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{\pi}{x^2} y = \frac{\sin(\sqrt{\pi} \log x)}{x^2} \quad x > 0.$$

Svolgimento

1) La funzione é definita su tutto il piano $I\!R^2$. I punti del tipo $x = 0$ sono da studiare a parte perché annullano il valore assoluto e quindi si deve controllare la derivabilitá.

Discutendo il modulo si ottiene

$$f(x,y) = x(x + y + \sqrt{2}) \quad x \geq 0$$

e

$$f(x,y) = -x(x + y + \sqrt{2}) \quad x < 0.$$

Calcolando il gradiente nei punti $x > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y + \sqrt{2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

da cui si ottiene la soluzione $(0, -\sqrt{2})$ che non puó essere accettata. La stessa cosa succede per i punti $x < 0$.

A questo punto non rimane che studiare i punti $x = 0$. A tale scopo lo studio del segno della funzione si rivela decisivo. Infatti si ha che f é nulla nei punti delle rette $x = 0$ e $y = -x - \sqrt{2}$, positiva nei punti del tipo $y > -x - \sqrt{2}$ negativa altrove. Si ottiene allora che i punti $(0, y)$ con $y > -\sqrt{2}$ sono punti di minimo, i punti $(0, y)$ con $y < -\sqrt{2}$ sono punti di massimo e il punto $(0, -\sqrt{2})$ é un punto sella. La funzione non ammette massimo e minimo assoluti poiché ad esempio la restrizione ai punti dell'asse x fornisce

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty.$$

2) Operando il cambiamento di variabili $x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\varrho\cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho\sin t$ si ottiene $D' = \{(\varrho, t) : 0 \leq \varrho \leq 1 \ \text{ e } 0 \leq t \leq 2\pi\}$, infatti il dominio $\pi x^2 + 2y^2 \leq 1$ diventa

$$\pi\frac{1}{\pi}\varrho^2\cos^2 t + 2\varrho^2\frac{1}{2}\sin^2 t \leq 1 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 1.$$

Poiché lo Jacobiano vale $J = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}}\varrho$ si ha

$$\iint_D \frac{1}{1 + \pi x^2 + 2y^2} dxdy = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \int\int_{D'} \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho \int_0^{2\pi} dt$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{\varrho}{1 + \varrho^2} d\varrho = \frac{\pi}{\sqrt{\pi}\sqrt{2}} [\log(1 + \varrho^2)]_0^1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \log 2.$$

3) Si tratta di un'equazione differenziale equidimensionale di Eulero, infatti moltiplicando per x^2 diventa

$$x^2y'' + xy' + \pi y = \sin(\sqrt{\pi}\log x) \quad x > 0.$$

Posto $x = e^t \leftrightarrow \log x = t$ si ha

$$y''(t) + \pi y(t) = \sin(\sqrt{\pi}t).$$

Considerando l'equazione omogenea associata $y'' + \pi y = 0$ si ottiene che l'equazione caratteristica é data da $\lambda^2 + \pi = 0$ da cui $\lambda = \pm i\sqrt{\pi}$. Le soluzioni sono allora $y = \cos(\sqrt{\pi}t)$, $y = \sin(\sqrt{\pi}t)$ e l'integrale generale risulta essere

$$C_1\cos(\sqrt{\pi}t) + C_2\sin(\sqrt{\pi}t).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché $\sqrt{\pi}i$ é soluzione dell'equazione caratteristica si devono cercare soluzioni del tipo

$$y = At\cos(\sqrt{\pi}t) + Bt\sin(\sqrt{\pi}t).$$

Eseguendo le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $A = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$ e $B = 0$. La soluzione particolare é allora data da

$$y(t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t\cos(\sqrt{\pi}t)$$

cioé

$$y(x) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\log x\cos(\sqrt{\pi}\log x).$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$Y(x) = C_1\cos(\sqrt{\pi}\log x) + C_2\sin(\sqrt{\pi}\log x) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\log x\cos(\sqrt{\pi}\log x).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
26 Giugno 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = |y|(-x + y + \sqrt{5}).$$

Esistono massimi e minimi assoluti in $I\!R^2$?

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{1+\sqrt{2}x^2+y^2} dxdy$$

dove D é la parte interna all'ellisse di centro l'origine e di semiassi $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ e 1 rispetto agli assi x e y rispettivamente.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$xy'' + y' + \frac{\sqrt{3}}{x}y = \frac{\sin(\sqrt[4]{3}\log x)}{x} \quad x > 0.$$

Svolgimento

1) La funzione é definita su tutto il piano $I\!R^2$. I punti del tipo $y=0$ sono da studiare a parte perché annullano il valore assoluto e quindi si deve controllare la derivabilitá.

Discutendo il modulo si ottiene

$$f(x,y) = y(-x+y+\sqrt{5}) \quad y \geq 0$$

e

$$f(x,y) = -y(-x+y+\sqrt{5}) \quad y < 0.$$

Calcolando il gradiente nei punti $y>0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x+2y+\sqrt{5}$$

da cui si ottiene la soluzione $(\sqrt{5},0)$ che non puó essere accettata. La stessa cosa succede per i punti $y<0$.

A questo punto non rimane che studiare i punti $y=0$. A tale scopo lo studio del segno della funzione si rivela decisivo. Infatti si ha che f é nulla nei punti delle rette $y=0$ e $y=x-\sqrt{5}$, positiva nei punti del tipo $y>x-\sqrt{5}$ negativa altrove. Si ottiene allora che i punti $(x,0)$ con $x<\sqrt{5}$ sono punti di minimo, i punti $(x,0)$ con $x>\sqrt{5}$ sono punti di massimo e il punto $(\sqrt{5},0)$ é un punto sella. La funzione non ammette massimo e minimo assoluti poiché ad esempio la restrizione ai punti dell'asse y fornisce

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \pm\infty.$$

2) Operando il cambiamento di variabili $x=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\varrho\cos t$, $y=\varrho\sin t$ si ottiene $D' = \{(\varrho,t) : 0\leq\varrho\leq 1 \text{ e } 0\leq t\leq 2\pi\}$, infatti il dominio $\sqrt{2}x^2+y^2\leq 1$ diventa

$$\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sin^2 t \leq 1 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 1.$$

Poiché lo Jacobiano vale $J=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\varrho$ si ha

$$\iint_D \frac{1}{1+\sqrt{2}x^2+y^2}dxdy = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int\int_{D'}\frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho dt = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int_0^1\frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho\int_0^{2\pi}dt$$

$$= 2\pi\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\int_0^1\frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho = \pi\frac{1}{\sqrt[4]{2}}[\log(1+\varrho^2)]_0^1 = \pi\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\log 2.$$

3) Si tratta di un'equazione differenziale equidimensionale di Eulero, infatti moltiplicando per x diventa

$$x^2y'' + xy' + \sqrt{3}y = \sin(\sqrt[4]{3}\log x) \quad x > 0.$$

Posto $x = e^t \leftrightarrow \log x = t$ si ha

$$y''(t) + \sqrt{3}y(t) = \sin(\sqrt[4]{3}t).$$

Considerando l'equazione omogenea associata $y'' + \sqrt{3}y = 0$ si ottiene che l'equazione caratteristica é data da $\lambda^2 + \sqrt{3} = 0$ da cui $\lambda = \pm i\sqrt[4]{3}$. Le soluzioni sono allora $y = \cos(\sqrt[4]{3}t)$, $y = \sin(\sqrt[4]{3}t)$ e l'integrale generale risulta essere

$$C_1\cos(\sqrt[4]{3}t) + C_2\sin(\sqrt[4]{3}t).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché $\sqrt[4]{3}i$ é soluzione dell'equazione caratteristica si devono cercare soluzioni del tipo

$$y = At\cos(\sqrt[4]{3}t) + Bt\sin(\sqrt[4]{3}t).$$

Eseguendo le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $A = -\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$ e $B = 0$. La soluzione particolare é allora data da

$$y(t) = -\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}t\cos(\sqrt[4]{3}t)$$

cioé

$$y(x) = -\frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\log x\cos(\sqrt[4]{3}\log x).$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$Y(x) = C_1\cos(\sqrt[4]{3}\log x) + C_2\sin(\sqrt[4]{3}\log x) - \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}\log x\cos(\sqrt[4]{3}\log x).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
26 Giugno 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare, se esistono, i massimi e minimi relativi della funzione

$$f(x,y) = |x|(x - y + \sqrt{3}).$$

Esistono massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}^2$?

2) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{1 + 2x^2 + \sqrt{2}y^2} dxdy$$

dove D é la parte interna all'ellisse di centro l'origine e di semiassi $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ rispetto agli assi x e y rispettivamente.

3) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$xy'' + y' + \frac{1}{\pi x}y = \frac{\cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x)}{x} \quad x > 0.$$

Svolgimento

1) La funzione é definita su tutto il piano $I\!R^2$. I punti del tipo $x = 0$ sono da studiare a parte perché annullano il valore assoluto e quindi si deve controllare la derivabilitá.

Discutendo il modulo si ottiene

$$f(x,y) = x(x - y + \sqrt{3}) \quad x \geq 0$$

e

$$f(x,y) = -x(x - y + \sqrt{3}) \quad x < 0.$$

Calcolando il gradiente nei punti $x > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + \sqrt{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x$$

da cui si ottiene la soluzione $(0, \sqrt{3})$ che non puó essere accettata. La stessa cosa succede per i punti $x < 0$.

A questo punto non rimane che studiare i punti $x = 0$. A tale scopo lo studio del segno della funzione si rivela decisivo. Infatti si ha che f é nulla nei punti delle rette $x = 0$ e $y = x+\sqrt{3}$, positiva nei punti del tipo $y < x+\sqrt{3}$ negativa altrove. Si ottiene allora che i punti $(0, y)$ con $y > \sqrt{3}$ sono punti di massimo, i punti $(0, y)$ con $y < \sqrt{3}$ sono punti di minimo e il punto $(0, \sqrt{3})$ é un punto sella. La funzione non ammette massimo e minimo assoluti poiché ad esempio la restrizione ai punti dell'asse x fornisce

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x, 0) = \pm\infty.$$

2) Operando il cambiamento di variabili $x = \frac{1}{\sqrt{2}}\varrho\cos t$, $y = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\varrho\sin t$ si ottiene $D' = \{(\varrho, t) : 0 \leq \varrho \leq 1 \text{ e } 0 \leq t \leq 2\pi\}$, infatti il dominio $2x^2 + \sqrt{2}y^2 \leq 1$ diventa

$$2\frac{1}{2}\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2 t \leq 1 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 1.$$

Poiché lo Jacobiano vale $J = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\varrho$ si ha

$$\iint_D \frac{1}{1 + 2x^2 + \sqrt{2}y^2}dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\int\int_{D'} \frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho dt = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\int_0^1 \frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho \int_0^{2\pi} dt$$

$$= 2\pi\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\int_0^1 \frac{\varrho}{1+\varrho^2}d\varrho = \pi\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}[\log(1+\varrho^2)]_0^1 = \pi\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{2}}\log 2.$$

3) Si tratta di un'equazione differenziale equidimensionale di Eulero, infatti moltiplicando per x diventa

$$x^2y'' + xy' + \frac{1}{\pi}y = \cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x) \quad x > 0.$$

Posto $x = e^t \leftrightarrow \log x = t$ si ha

$$y''(t) + \frac{1}{\pi}y(t) = \cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t).$$

Considerando l'equazione omogenea associata $y'' + \frac{1}{\pi}y = 0$ si ottiene che l'equazione caratteristica é data da $\lambda^2 + \frac{1}{\pi} = 0$ da cui $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{1}{\pi}}$. Le soluzioni sono allora $y = \cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t)$, $y = \sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t)$ e l'integrale generale risulta essere

$$C_1\cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t) + C_2\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t).$$

Determiniamo ora una soluzione particolare dell'equazione completa. Poiché $\frac{1}{\sqrt{\pi}}i$ é soluzione dell'equazione caratteristica si devono cercare soluzioni del tipo

$$y = At\cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t) + Bt\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t).$$

Eseguendo le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale si ottiene $A = 0$ e $B = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La soluzione particolare é allora data da

$$y(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}t\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}t)$$

cioé

$$y(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\log x\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x).$$

Pertanto l'integrale generale é dato da

$$Y(x) = C_1\cos(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x) + C_2\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\log x\sin(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\log x).$$