Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
25 Giugno 2004

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità in $(0,0)$ della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

2) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' + y = \tan x.$$

3) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+5}},$$

dove la curva γ è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(1,2)$.

Svolgimento

1) Cominciamo con lo studio della continutá nell'origine. Si deve calcolare il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Utilizzando le coordinate polari si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^4\cos^4 x + \varrho^4\sin^4 x}{\varrho^2(\cos^2 x + \sin^2 x)} \leq \lim_{\varrho\to 0^+} 2\varrho^2 = 0.$$

la funzione risulta quindi continua nell'origine. Determiniamo ora le derivate parziali, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2} = 0.$$

La funzione risulta essere derivabile parzialmente nell'origine con entrambe le derivate nulle. Stabiliamo infine la differenziabilitá nell'origine. Applicando la definizione di funzione differenziabile in $(0,0)$ si ha

$$f(x,y) - f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y).$$

Nel caso specifico otteniamo

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon(x,y)$$

da cui

$$\varepsilon(x,y) = \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)}.$$

A questo punto rimane solo da determinare se ε é un infinitesimo, quindi calcoliamo il seguente limite, utilizzando le coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} = \lim_{\varrho\to 0^+} \frac{\varrho^4\cos^4 x + \varrho^4\sin^4 x}{\varrho\varrho^2(\cos^2 x + \sin^2 x)} \leq \lim_{\varrho\to 0^+} 2\varrho = 0.$$

2) Si tratta di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Studiamo l'omogenea associata

$$y'' + y = 0.$$

L'equazione caratteristica risulta essere

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$\lambda = \pm i.$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Determiniamo ora una soluzione particolare del tipo

$$y(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2$$

con il metodo della variazione delle costanti. La matrice Wronskiana diventa

$$J = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

il cui determinante vale esattamente 1. Per cui si ottiene

$$v_1(x) = \int -\tan x \sin x dx$$

e

$$v_2(x) = \int \tan x \cos x dx.$$

Calcolando v_1 si ottiene

$$\begin{aligned} v_1(x) = \int -\tan x \sin x dx &= \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx \\ = \quad \int \frac{-1 + \cos^2 x}{\cos x} dx &= \int -\frac{1}{\cos x} dx + \int \cos x dx \\ = \quad -\log(\frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}) + \sin x, \end{aligned}$$

avendo risolto il primo integrale con la sostituzione $\tan x/2 = t$. Infine si ha

$$v_2(x) = \int \tan x \cos x dx = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Quindi un integrale particolare risulta essere

$$y(x) = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -\cos x \log(\frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}).$$

In conclusione l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato da

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \log(\frac{1 + \tan x/2}{1 - \tan x/2}).$$

3) Una parametrizzazione della curva è data da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$. Dalla definizione di integrale curvilineo si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+5}} &= \int_0^1 \frac{\sqrt{5}dt}{\sqrt{5t^2+5}} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt. \end{aligned}$$

Eseguendo la sostituzione

$$\sqrt{t^2+1} = t + x$$

si ottiene

$$t = \frac{1-x^2}{2x}$$

da cui

$$dt = \frac{-x^2-1}{2x^2} dx$$

e allora si ha

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt &= \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{-(x^2+1)}{\frac{1-x^2}{2x}+x} \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{2}-1} \frac{-2x(x^2+1)}{1+x^2} \frac{1}{2x^2} dx \\ &= \int_{\sqrt{2}-1}^1 \frac{1}{x} dx = -\log(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$