Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
22 Settembre 2006

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare l'area della regione del piano definita dalle limitazioni

$$|x+y| \leq 1, |x-y| \leq 1.$$

2) Si calcoli il lavoro del campo vettoriale

$$U(x,y) = (xy, \frac{x^2}{2})$$

lungo la curva $|x| + |y| = 1$.

3) Calcolare il flusso del campo vettoriale $U(x,y) = (2xy, x^3 + y^3)$ uscente dalla frontiera dell'insieme delimitato dai grafici delle funzioni $y = 1 - |x|$ e $y = |x| - 1$.

Svolgimento

1) Dalle limitazioni stabilite si ottiene che l'insieme D di cui si deve calcolare l'area é

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x - 1 \leq y \leq 1 - x,\ x - 1 \leq y \leq 1 + x\}.$$

Operando il cambiamento di variabili $x + y = u, \quad x - y = v$ con $D' = \{(u, v) : -1 \leq u \leq 1 \text{ e } -1 \leq v \leq 1\}$, si ha che lo Jacobiano vale $J = -1/2$. Allora si ha

$$\iint_D dxdy = \int\int_{D'} \frac{1}{2} dudv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} du \int_{-1}^{1} dv = 2.$$

2) La forma differenziale associata al campo

$$\omega = xydx + \frac{x^2}{2} dy$$

é chiusa in $\mathbb{R}^2$. Pertanto é anche esatta essendo l'insieme convesso. Il lavoro risulta quindi uguale a zero poiché la curva data $|x| + |y| = 1$ é chiusa.

3) Il flusso si calcola attraverso il teorema della divergenza con

$$F = \int\int_D (2y + 3y^2) dxdy.$$

Si ha

$$F = \int_{-1}^{1} (2y + 3y^2) dy \int_{|y|-1}^{1-|y|} dx = 2 \int_{-1}^{1} (2y + 3y^2)(1 - |y|) dy = 1$$