Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
20 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x \log x}$$

con $y(2) = 1, y'(2) = 1$.

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{36-x^2-y^2}} dxdy$$

dove D è la parte del piano interna alla curva di equazione

$$x^2 + y^2 - 6x = 0.$$

Svolgimento

1) Controlliamo la continutá. Poiché si ha

$$0 \le \left| \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^4} \right| \le \left| \frac{x^2y^3}{x^2} \right| = |y^3|$$

otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2y^3)}{x^2+y^4} = 0 = f(0,0).$$

Osservando che la funzione f é identicamente nulla lungo gli assi cartesiani si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Studiamo infine la differenziabilitá. Si deve calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h^2k^3)}{h^2+k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Poiché si ha

$$0 \le \left| \frac{\sin(h^2k^3)}{h^2+k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \left| \frac{h^2k^3}{h^2+k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \le \frac{h^2|k^3|}{h^2\sqrt{k^2}} = k^2$$

allora la funzione risulta differenziabile.

2) Poniamo $y' = z$ da cui $y'' = z'$. Si ottiene allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{x \log x} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{x \log x} z$$

che é un'equazione a variabili separabili. Quindi

$$\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \log x}$$

da cui integrando

$$\log|z| = \log|\log x| + C.$$

Posto $C = \log K$ con $K > 0$ si ha

$$\log|z| = \log|\log x| + \log K \Leftrightarrow \log|z| = \log K|\log x| \Leftrightarrow |z| = K|\log x|.$$

Possiamo considerare $x > 1$. Dalle condizioni iniziali si ha che $z > 0$ e quindi

$$z = K \log x \Leftrightarrow y' = K \log x$$

da cui integrando

$$y = K \int \log x dx = K(x \log x - x) + A.$$

Dalle condizioni iniziali si ha che

$$y'(2) = 1 = K \log 2 \Leftrightarrow K = \frac{1}{\log 2},$$

inoltre

$$y(2) = 1 = \frac{1}{\log 2}(2 \log 2 - 2) + A$$

da cui si ricava la costante A.

3) L'insieme D é la parte interna alla circonferenza di centro il punto $(3, 0)$ e raggio 3. Considerando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos t, \quad y = \varrho \sin t$$

si ha che il nuovo dominio D' é dato da

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 6 \cos t$$

infatti

$$\varrho^2 \cos^2 t + \varrho^2 \sin^2 t - 6\varrho \cos t \leq 0 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 6\varrho \cos t \Leftrightarrow \varrho \leq 6 \cos t.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
& \int\int_D \frac{1}{\sqrt{36 - x^2 - y^2}} dxdy = \int\int_{D'} \frac{\varrho}{\sqrt{36 - \varrho^2}} d\varrho dt \\
= & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{6 \cos t} \frac{\varrho}{\sqrt{36 - \varrho^2}} d\varrho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-\sqrt{36 - \varrho^2}]_0^{6 \cos t} \\
= & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{36 - 36 \cos^2 t} + \sqrt{36}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-6\sqrt{1 - \cos^2 t} + 6) dt \\
= & \; 6\pi - 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t} dt = 6\pi - 6 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt \\
= & \; 6\pi - 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 6\pi - 12.
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
20 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3y^2)}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\frac{y''}{y'} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x}$$

con $y(\frac{\pi}{4}) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1.$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$$

dove D è la parte del piano interna alla curva di equazione

$$x^2+y^2-2x = 0.$$

Svolgimento

1) Controlliamo la continutá. Poiché si ha

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^3y^2)}{x^4+y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3y^2}{y^2} \right| = |x^3|$$

otteniamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y^2)}{x^4+y^2} = 0 = f(0,0).$$

Osservando che la funzione f é identicamente nulla lungo gli assi cartesiani si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Studiamo infine la differenziabilitá. Si deve calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h^3k^2)}{h^4+k^2} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Poiché si ha

$$0 \leq \left| \frac{\sin(h^3k^2)}{h^4+k^2} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \left| \frac{h^3k^2}{h^4+k^2} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| \leq \frac{|h^3|k^2}{k^2\sqrt{h^2}} = h^2$$

allora la funzione risulta differenziabile.

2) Poniamo $y' = z$ da cui $y'' = z'$. Si ottiene allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} \Leftrightarrow z' = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} z$$

che é un'equazione a variabili separabili. Quindi

$$\frac{dz}{z} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$$

da cui integrando

$$\log|z| = \log|\sin x + \cos x| + C.$$

Posto $C = \log K$ con $K > 0$ si ha

$$\log|z| = \log|\sin x + \cos x| + \log K \Leftrightarrow \log|z| = \log K|\sin x + \cos x| \Leftrightarrow |z| = K|\sin x + \cos x|.$$

Possiamo considerare $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Dalle condizioni iniziali $z > 0$ e quindi

$$z = K(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow y' = K(\sin x + \cos x)$$

da cui integrando

$$y = K(-\cos x + \sin x) + A.$$

Dalla condizione

$$y'(\frac{\pi}{4}) = 1$$

si ottiene

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

mentre dalla condizione

$$y(\frac{\pi}{4}) = 1$$

si ha $A = 1$.

3) L'insieme D é la parte interna alla circonferenza di centro il punto $(1, 0)$ e raggio 1. Considerando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos t, \quad y = \varrho \sin t$$

si ha che il nuovo insieme D' é dato da

$$-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2\cos t$$

infatti

$$\varrho^2 \cos^2 t + \varrho^2 \sin^2 t - 2\varrho \cos t \leq 0 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 2\varrho \cos t \Leftrightarrow \varrho \leq 2\cos t.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
& \int\int_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy = \int\int_{D'} \frac{\varrho}{\sqrt{4 - \varrho^2}} d\varrho dt \\
= & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt \int_0^{2\cos t} \frac{\varrho}{\sqrt{4 - \varrho^2}} d\varrho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-\sqrt{4 - \varrho^2}]_0^{2\cos t} \\
= & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-\sqrt{4 - 4\cos^2 t} + \sqrt{4}) dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\sqrt{1 - \cos^2 t} + 2) dt \\
= & \; 2\pi - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2 t} dt = 2\pi - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| dt \\
= & \; 2\pi - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 2\pi - 4.
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
20 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso _____________ **Matricola** ____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^5y^4)}{x^6+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$$

con $y(1) = 1, y'(1) = 1$.

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dxdy$$

dove D è la parte del piano interna alla curva di equazione

$$x^2+y^2-4y=0.$$

Svolgimento

1) Controlliamo la continutá. Poiché si ha

$$0 \leq \left| \frac{\sin(x^5y^4)}{x^6 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^5y^4}{y^4} \right| = |x^5|$$

si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^5y^4)}{x^6 + y^4} = 0 = f(0,0).$$

Osservando che la funzione f é identicamente nulla lungo gli assi cartesiani si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Studiamo infine la differenziabilitá. Si deve calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h^5k^4)}{h^6 + k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}}.$$

Poiché si ha

$$0 \leq \left| \frac{\sin(h^5k^4)}{h^6 + k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \left| \frac{h^5k^4}{h^6 + k^4} \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \frac{|h^5|k^4}{k^4\sqrt{h^2}} = h^4$$

allora la funzione risulta differenziabile.

2) Poniamo $y' = z$ da cui $y'' = z'$. Si ottiene allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{1}{(1 + x^2)\arctan x} \Leftrightarrow z' = \frac{1}{(1 + x^2)\arctan x} z$$

che é un'equazione a variabili separabili. Quindi

$$\frac{dz}{z} = \frac{1}{(1 + x^2)\arctan x} dx$$

da cui integrando

$$\log |z| = \log |\arctan x| + C.$$

Posto $C = \log K$ con $K > 0$ si ha

$$\log |z| = \log |\arctan x| + \log K \Leftrightarrow \log |z| = \log K |\arctan x| \Leftrightarrow |z| = K |\arctan x|.$$

Possiamo considerare $x > 0$. Dalle condizioni iniziali $z > 0$ e quindi

$$z = K \arctan x \Leftrightarrow y' = K \arctan x$$

da cui integrando

$$y = K\int \arctan x dx = Kx\arctan x - K\int \frac{x}{1+x^2}dx = Kx\arctan x - \frac{K}{2}\log(1+x^2) + A.$$

Dalle condizioni iniziali si ha

$$y'(1) = 1 = K\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow K = \frac{4}{\pi}$$

e

$$y(1) = 1 = \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\log 2 + A$$

da cui si ricava la costante A.

3) L'insieme D é la parte interna alla circonferenza di centro il punto $(0,2)$ e raggio 2. Considerando le coordinate polari

$$x = \varrho\cos t, \quad y = \varrho\sin t$$

si ha che il nuovo insieme D' é dato da

$$0 \le t \le \pi, \quad 0 \le \varrho \le 4\sin t$$

infatti

$$\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sin^2 t - 4\varrho\sin t \le 0 \Leftrightarrow \varrho^2 \le 4\varrho\sin t \Leftrightarrow \varrho \le 4\sin t.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned}
&\int\int_D \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dxdy = \int\int_{D'} \frac{\varrho}{\sqrt{16-\varrho^2}}d\varrho dt \\
= \;& \int_0^\pi dt \int_0^{4\sin t} \frac{\varrho}{\sqrt{16-\varrho^2}}d\varrho = \int_0^\pi [-\sqrt{16-\varrho^2}]_0^{4\sin t} \\
= \;& \int_0^\pi (-\sqrt{16-16\sin^2 t} + \sqrt{4})dt = \int_0^\pi (-4\sqrt{1-\sin^2 t} + 4)dt \\
= \;& 4\pi - 4\int_0^\pi \sqrt{1-\sin^2 t}dt = 4\pi - 4\int_0^\pi |\cos t|dt = 4\pi - 8.
\end{aligned}$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
20 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare continuità, derivabilità e differenziabilità nell'origine della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4y^5)}{x^4+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\frac{y''}{y'} = -\tan x$$

con $y(\frac{\pi}{4}) = 1, y'(\frac{\pi}{4}) = 1.$

3) Calcolare l'integrale doppio

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dxdy$$

dove D è la parte del piano interna alla curva di equazione

$$x^2+y^2-2y=0.$$

Svolgimento

1) Controlliamo la continutá. Poiché si ha

$$0 \leq \left|\frac{\sin(x^4y^5)}{x^4+y^6}\right| \leq \left|\frac{x^4y^5}{x^4}\right| = |y^5|$$

si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4y^5)}{x^4+y^6} = 0 = f(0,0).$$

Osservando che la funzione f é identicamente nulla lungo gli assi cartesiani si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Studiamo infine la differenziabilitá. Si deve calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h^4k^5)}{h^4+k^6}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Poiché si ha

$$0 \leq \left|\frac{\sin(h^4k^5)}{h^4+k^6}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \left|\frac{h^4k^5}{h^4+k^6}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq \frac{|k^5|h^4}{h^4\sqrt{k^2}} = k^4$$

allora la funzione risulta differenziabile.

2) Poniamo $y' = z$ da cui $y'' = z'$. Si ottiene allora

$$\frac{z'}{z} = \frac{-\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow z' = \frac{-\sin x}{\cos x}z$$

che é un'equazione a variabili separabili. Quindi

$$\frac{dz}{z} = \frac{-\sin x}{\cos x}dx$$

da cui integrando

$$\log|z| = \log|\cos x| + C.$$

Posto $C = \log K$ con $K > 0$ si ha

$$\log|z| = \log|\cos x| + \log K \Leftrightarrow \log|z| = \log K|\cos x| \Leftrightarrow |z| = K|\cos x|.$$

Possiamo considerare $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Dalle condizioni iniziali $z > 0$ e quindi

$$z = K\cos x \Leftrightarrow y' = K\cos x$$

da cui integrando

$$y = K \int \cos x dx = K \sin x + A.$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene

$$K = \sqrt{2}, \quad A = 0.$$

3) L'insieme D é la parte interna alla circonferenza di centro il punto $(0,1)$ e raggio 1. Considerando le coordinate polari

$$x = \varrho \cos t, \quad y = \varrho \sin t$$

si ha che il nuovo insieme D' é dato da

$$0 \leq t \leq \pi, \quad 0 \leq \varrho \leq 2 \sin t$$

infatti

$$\varrho^2 \cos^2 t + \varrho^2 \sin^2 t - 2\varrho \sin t \leq 0 \Leftrightarrow \varrho^2 \leq 2\varrho \sin t \Leftrightarrow \varrho \leq 2 \sin t.$$

Si ottiene allora

$$\begin{aligned} \int\int_D \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dxdy &= \int\int_{D'} \frac{\varrho}{\sqrt{4 - \varrho^2}} d\varrho dt \\ = \int_0^\pi dt \int_0^{2\sin t} \frac{\varrho}{\sqrt{4 - \varrho^2}} d\varrho &= \int_0^\pi [-\sqrt{4 - \varrho^2}]_0^{2\sin t} \\ = \int_0^\pi (-\sqrt{4 - 4\sin^2 t} + \sqrt{4}) dt &= \int_0^\pi (-2\sqrt{1 - \sin^2 t} + 2) dt \\ = 2\pi - 2\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin^2 t} dt &= 2\pi - 2\int_0^\pi |\cos t| dt = 2\pi - 4. \end{aligned}$$