UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma dx - dy + z\sqrt{1+x^2+y^2}\,dz$$

dove γ é la curva di equazioni parametriche

$$\varphi(t) = (t\cos t, t\sin t, t),\ \ t \in [0, 2\pi].$$

2. Determinare l'insieme D dei punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ che verificano la relazione

$$|x| + |y| = x + y.$$

Determinare poi i massimi e minimi relativi in D della funzione

$$f(x, y) = xye^{-(x+y)}.$$

3. Trovare le soluzioni al variare di α dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 10y = 0 \\ y(0) = 1,\ \ y'(0) = \alpha \end{cases}$$

Stabilire per quali valori di α esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} y.$$

Svolgimento

1. Dalla definizione di integrale curvilineo si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \int_\gamma dx - dy + z\sqrt{1+x^2+y^2}dz \\
= & \int_0^{2\pi} (\cos t - t\sin t - \sin t - t\cos t + t\sqrt{1+t^2})dt \\
= & -\int_0^{2\pi} (t\sin t + t\cos t)dt + \int_0^{2\pi} t\sqrt{1+t^2}dt \\
= & -2\pi + \frac{1}{3}((1+4\pi^2)^{3/2} - 1).
\end{aligned}$$

2. Cominciamo col determinare l'insieme dei punti D che soddisfano la relazione

$$|x| + |y| = x + y.$$

Si ha anzitutto $x+y \geq 0$ ed elevando al quadrato ambo i membri della precedente relazione si ha l'uguaglianza

$$|xy| = xy,$$

che é soddisfatta per x, y non negativi (non possono essere negativi altrimenti $x+y$ sarebbe negativo. L'insieme D é dunque il I quadrante chiuso. Qui la funzione f é non negativa e si annulla sui punti $(x, 0)$, $(0, y)$, con $x, y \geq 0$. Pertanto tali punti sono minimi assoluti in D per la funzione f.

Calcoliamo ora le derivate prime di f. Si ha:

$$f'_x(x,y) = y(1-x)e^{-(x+y)}, \qquad f'_y(x,y) = x(1-y)e^{-(x+y)},$$

che in D° si annullano soltanto nel punto $(1,1)$. Non ci sono altri punti critici in D°. Per determinare la natura del punto critico, calcoliamo le derivate seconde. Risulta:

$$f''_{xx}(x,y) = -y(2-x)e^{-(x+y)}, \qquad f''_{yy}(x,y) = -x(2-y)e^{-(x+y)},$$

$$f''_{xy}(x,y) = (1-x)(1-y)e^{-(x+y)},$$

da cui segue subito che $H(1,1) = e^{-4} > 0$ e $f''_{xx}(1,1) = -e^{-2} < 0$. Il punto $(1,1)$ é dunque un punto di massimo relativo.

3. Si tratta di un'equazione lineare omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica risulta essere

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$$

le cui radici sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 5$. L'integrale generale é quindi dato da:

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}.$$

Imponendo i dati iniziali, si ottiene $c_1 + c_2 = 1$ e $-2c_1 + 5c_2 = \alpha$, da cui si ricava:

$$c_1 = \frac{5-\alpha}{7}, \quad c_2 = \frac{2+\alpha}{7}.$$

Il limite richiesto sará finito solo per $\alpha = -2$ e la soluzione corrispondente é data quindi da

$$y(x) = e^{-2x}.$$