Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y+x-1}{(x+1)^2+(y-2)^2}dx + \frac{y-x-3}{(x+1)^2+(y-2)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}}y' + \frac{1}{x^2+\sqrt{2}}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(-1,2)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x+1)^2 - (y-2)^2 - 2(y-2)(x+1)}{((x+1)^2 + (y-2)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(-1,2)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = -1 + \cos t, \ y = 2 + \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -\frac{1}{2}x$. In questi punti si ha $f(x, -\frac{1}{2}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + xy + y^2 = (\frac{1}{2}x + y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}}}}{x^2} dx.$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha

$$x\int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\sqrt{2}}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\sqrt{2}}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{2})}}{x^2}dx$$
$$= x\int \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}{x^2}dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2}}}{x^2}dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$= -t - \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}+1}\right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1x + C_2\left(-x\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}+1}\right|\right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y+x}{(x-2)^2+(y+2)^2}dx + \frac{y-x+4}{(x-2)^2+(y+2)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2+\sqrt{3}}y' + \frac{1}{x^2+\sqrt{3}}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(2,-2)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-2)^2 - (y+2)^2 - 2(y+2)(x-2)}{((x-2)^2 + (y+2)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(+2,-2)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = 2 + \cos t,\ y = -2 + \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{1}{2}y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -2x$. In questi punti si ha $f(x, -2x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 = (x + \frac{1}{2}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\sqrt{3}}}}{x^2} dx.$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha

$$x\int\frac{e^{\int\frac{x}{x^2+\sqrt{3}}}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+\sqrt{3}}}}{x^2}dx=x\int\frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{3})}}{x^2}dx$$
$$=x\int\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{3}}}{x^2}dx.$$

Operando la sostituzione $t^2=1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}$ si ottiene

$$\int\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{3}}}{x^2}dx=-\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=-t-\int\frac{1}{t^2-1}dt$$
$$=-t-\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

Pertanto

$$y_2=-x\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}-\frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}+1}\right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1x+C_2\left(-x\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}-\frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{x^2}}+1}\right|\right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y + x - 1 - \pi}{(x-\pi)^2 + (y-1)^2} dx + \frac{y - x - 1 + \pi}{(x-\pi)^2 + (y-1)^2} dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2 + \pi} y' + \frac{1}{x^2 + \pi} y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(\pi, 1)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-\pi)^2 - (y-1)^2 - 2(y-1)(x-\pi)}{((x-\pi)^2 + (y-1)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(\pi, 1)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = \pi + \cos t, \;\; y = 1 + \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -x$. In questi punti si ha $f(x, -x) = 0$ e inoltre

$$f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\pi}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha

$$
\begin{aligned}
&x\int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\pi}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\pi}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2+\pi)}}{x^2}dx \\
&= x\int \frac{\sqrt{x^2+\pi}}{x^2}dx.
\end{aligned}
$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 + \frac{\pi}{x^2}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\sqrt{x^2+\pi}}{x^2}dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1}dt \\
&= -t - \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
y_2 = -x\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}}+1}\right|.
$$

L'integrale generale risulta quindi

$$
C_1x + C_2\left(-x\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\pi}{x^2}}+1}\right|\right).
$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y+x-1}{(x+2)^2+(y-3)^2}dx + \frac{y-x-5}{(x+2)^2+(y-3)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2+2\pi}y' + \frac{1}{x^2+2\pi}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(-2,3)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x+2)^2-(y-3)^2-2(y-3)(x+2)}{((x+2)^2+(y-3)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(-2,3)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = -2+\cos t,\ y = 3+\sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t+\cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t-\cos t)\cos t}{1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} -1dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x+y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x+y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y=-x$. In questi punti si ha $f(x,-x)=0$ e inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+2\pi}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha

$$x\int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+2\pi}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2\pi}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2+2\pi)}}{x^2}dx$$
$$= x\int \frac{\sqrt{x^2+2\pi}}{x^2}dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 + \frac{2\pi}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2\pi}}{x^2}dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$= -t - \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}}+1}\right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1x + C_2\left(-x\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{2\pi}{x^2}}+1}\right|\right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y+x+2}{(x+1)^2+(y+1)^2}dx + \frac{y-x}{(x+1)^2+(y+1)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2+\sqrt{7}}y' + \frac{1}{x^2+\sqrt{7}}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(-1,-1)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-1)^2 - (y-1)^2 - 2(y-1)(x-1)}{((x-1)^2 + (y-1)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(-1,-1)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = -1 + \cos t, \ y = -1 + \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}x + \sqrt{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{2}x + 4y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x$. In questi punti si ha $f(x, -\frac{1}{2\sqrt{2}}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{4}x^2 + \sqrt{2}xy + 2y^2 = (\frac{1}{2}x + \sqrt{2}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\sqrt{7}}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha

$$x\int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2+\sqrt{7}}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+\sqrt{7}}}}{x^2}dx = x\int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2+\sqrt{7})}}{x^2}dx$$
$$= x\int \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{7}}}{x^2}dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 + \frac{\sqrt{7}}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{7}}}{x^2}dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1}dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1}dt$$
$$= -t - \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|.$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}}+1}\right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1x + C_2\left(-x\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}} - \frac{1}{2}x\log\left|\frac{\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}}-1}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{7}}{x^2}}+1}\right|\right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y + x + 1}{x^2 + (y + 1)^2} dx + \frac{y - x + 1}{x^2 + (y + 1)^2} dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + \sqrt{2}xy + \frac{1}{4}y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2 - \pi} y' + \frac{1}{x^2 - \pi} y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{x^2-(y+1)^2-2(y+1)x}{(x^2+(y+1)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(0,-1)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = \cos t, \ y = -1+\sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t+\cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t-\cos t)\cos t}{1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $\mathbb{R}^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + \sqrt{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{2}x + \frac{1}{2}y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -2\sqrt{2}x$. In questi punti si ha $f(x, -2\sqrt{2}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = 2x^2 + \sqrt{2}xy + \frac{1}{4}y^2 = (\sqrt{2}x + \frac{1}{2}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-\pi}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha per $x^2 > \pi$

$$
\begin{aligned}
& x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-\pi}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-\pi}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2-\pi)}}{x^2} dx \\
& = x \int \frac{\sqrt{x^2-\pi}}{x^2} dx.
\end{aligned}
$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 - \frac{\pi}{x^2}$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{x^2-\pi}}{x^2} dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1} dt \\
& = -t - \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
y_2 = -x\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}}+1} \right|.
$$

L'integrale generale risulta quindi

$$
C_1 x + C_2 \left(-x\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}}-1}{\sqrt{1-\frac{\pi}{x^2}}+1} \right| \right).
$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y + x + 1}{(x+1)^2 + y^2} dx + \frac{y - x - 1}{(x+1)^2 + y^2} dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x, y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2 - \sqrt{5}} y' + \frac{1}{x^2 - \sqrt{5}} y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(-1,0)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x+1)^2 - y^2 - 2y(x+1)}{((x+1)^2 + y^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(-1,0)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = -1 + \cos t, \; y = \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2\sqrt{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{2}x + 2y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -\sqrt{2}x$. In questi punti si ha $f(x, -\sqrt{2}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = 2x^2 + 2\sqrt{2}xy + y^2 = (\sqrt{2}x + y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2 - \sqrt{5}}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha per $x^2 > \sqrt{5}$

$$x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-\sqrt{5}}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-\sqrt{5}}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2-\sqrt{5})}}{x^2} dx$$
$$= x \int \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{5}}}{x^2} dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{5}}}{x^2} dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= -t - \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|.$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x^2}} + 1} \right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1 x + C_2 \left(-x\sqrt{1 - \frac{\sqrt{5}}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{5}}{x^2}} + 1} \right| \right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y+x-1}{(x-3)^2+(y+2)^2}dx + \frac{y-x+5}{(x-3)^2+(y+2)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2-\sqrt{2}\pi}y' + \frac{1}{x^2-\sqrt{2}\pi}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $\mathbb{R}^2 \setminus \{(3,-2)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-3)^2-(y+2)^2-2(y+2)(x-3)}{((x-3)^2+(y+2)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(3,-2)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = 3+\cos t,\ y = -2+\sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t+\cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t-\cos t)\cos t}{1} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} -1dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $\mathbb{R}^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+2\sqrt{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2\sqrt{2}x+4y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$. In questi punti si ha $f(x, -\frac{1}{\sqrt{2}}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2 = (x+\sqrt{2}y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-\sqrt{2}\pi}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha per $x^2 > \sqrt{2}\pi$

$$x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-\sqrt{2}\pi}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-\sqrt{2}\pi}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2-\sqrt{2}\pi)}}{x^2} dx$$
$$= x \int \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2}\pi}}{x^2} dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2-\sqrt{2}\pi}}{x^2} dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= -t - \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right|.$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} + 1} \right|.$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1 x + C_2 \left(-x\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}\pi}{x^2}} + 1} \right| \right).$$

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
17 Aprile 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega = \frac{y + x - 3\pi}{(x-\pi)^2 + (y-2\pi)^2}dx + \frac{y - x - \pi}{(x-\pi)^2 + (y-2\pi)^2}dy$$

nel suo insieme di definizione.

2) Determinare i massimi e minimi relativi, se esistono, della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}xy + y^2.$$

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - \frac{x}{x^2 - 2\sqrt{3}}y' + \frac{1}{x^2 - 2\sqrt{3}}y = 0.$$

Svolgimento

1) Il dominio della forma differenziale lineare é $I\!R^2 \setminus \{(\pi, 2\pi)\}$ che non é un insieme stellato. Verifichiamo la chiusura. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{(x-\pi)^2 - (y-2\pi)^2 - 2(y-2\pi)(x-\pi)}{((x-\pi)^2 + (y-2\pi)^2)^2} = \frac{\partial X}{\partial x}$$

quindi la forma differenziale lineare é chiusa. Calcoliamo ora l'integrale curvilineo di ω su una circonferenza γ centrata in $(\pi, 2\pi)$ e raggio 1. Una rappresentazione parametrica é data da

$$x = \pi + \cos t, \ y = 2\pi + \sin t$$

con $t \in [0, 2\pi]$. Si ha allora

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \frac{(\sin t + \cos t)(-\sin t)}{1} + \frac{(\sin t - \cos t)\cos t}{1} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \int_0^{2\pi} -1 dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare non é esatta.

2) La funzione risulta infinitamente derivabile su tutto il piano $I\!R^2$, quindi gli unici punti candidati ad essere massimi e minimi si trovano tra le soluzioni del sistema del gradiente uguagliato a zero. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x + \sqrt{2}y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{2}x + 2y.$$

Il determinante della matrice dei coefficienti risulta nullo perció il sistema ha infinite soluzioni e gli unici punti critici sono quelli che appartengono alla retta $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x$. In questi punti si ha $f(x, -\frac{1}{\sqrt{2}}x) = 0$ e inoltre

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}xy + y^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}x + y)^2.$$

I punti critici trovati sono allora di minimo assoluto.

3) E' un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti non costanti. In questo caso si vede facilmente che una soluzione é data da $y_1 = x$. Una seconda soluzione linearmente indipendente si ottiene dalla formula

$$y_2 = x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2 - 2\sqrt{3}}}}{x^2} dx$$

Calcoliamo allora y_2. Si ha per $x^2 > 2\sqrt{3}$

$$x \int \frac{e^{\int \frac{x}{x^2-2\sqrt{3}}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-2\sqrt{3}}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\frac{1}{2}\log(x^2-2\sqrt{3})}}{x^2} dx$$
$$= x \int \frac{\sqrt{x^2-2\sqrt{3}}}{x^2} dx.$$

Operando la sostituzione $t^2 = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{x^2}$ si ottiene

$$\int \frac{\sqrt{x^2-2\sqrt{3}}}{x^2} dx = -\int \frac{t^2}{t^2-1} dt = -t - \int \frac{1}{t^2-1} dt$$
$$= -t - \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| .$$

Pertanto

$$y_2 = -x\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{3}}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{x^2}} + 1} \right| .$$

L'integrale generale risulta quindi

$$C_1 x + C_2 \left(-x\sqrt{1 - \frac{2\sqrt{3}}{x^2}} - \frac{1}{2} x \log \left| \frac{\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{x^2}} - 1}{\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{x^2}} + 1} \right| \right) .$$