Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
14 Dicembre 2006

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{n(x-3)^n}{2n^2+1}$$

determinare l'insieme di convergenza.

2) Calcolare il lavoro compiuto dal campo vettoriale

$$U(x,y) = (\log(x+y) + \frac{x}{x+y}, \frac{x}{x+y})$$

per spostare un corpo di massa unitaria lungo la curva $x^2 - 4x + y^2 + 3 = 0$ a partire da $P = (1,0)$ e facendogli compiere un giro completo in senso antiorario.

3) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = \frac{1}{2}e^x$$

e stabilire quali tra le soluzioni soddisfano la condizione

$$\lim_{x\to+\infty} y = 0.$$

Svolgimento

1) Ponendo $x-3=y$ si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{n}{2n^2+1}y^n$$

che risulta una serie di potenze con raggio R dato da

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{4^n(2n^2+1)}}=\frac{1}{4}.$$

Quindi $R=4$. Applicando i risultati sulle serie di potenze si ottiene che la serie converge puntualmente e assolutamente per ogni y tale che $|y|<4$ da cui $|x-3|<4\Leftrightarrow -1<x<7$. Studiamo cosa succede in $x=-1$ e $x=7$. Per $x=-1$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n^2+1}$$

che diverge per il criterio del confronto asintotico. Per $x=7$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2n^2+1}$$

che converge semplicemente per il criterio di Leibnitz.

2) Il lavoro é dato da, indicando con C la curva,

$$\int_C(\log(x+y)+\frac{x}{x+y})dx+\frac{x}{x+y}dy.$$

La curva é una circonferenza di centro $(2,0)$ e raggio 1 mentre il dominio del campo é dato da $x+y>0$ che risulta un insieme semplicemente connesso. Proviamo la chiusura della forma differenziale associata

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}=\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Essendo quindi chiusa in un insieme semplicemente connesso risulta allora anche esatta e l'integrale curvilineo su una curva chiusa é zero.

3) Si tratta di una equazione lineare del secondo ordine non omogenea. L'equazione caratteristica é data da

$$\lambda^2-2\lambda+1=0$$

che ha come soluzione $\lambda=1$ con molteplicitá 2. Si ha allora che la soluzione dell'equazione omogenea é data da

$$y=C_1e^x+C_2xe^x.$$

Poiché il termine noto risulta $\frac{1}{2}e^x$ e $\lambda = 1$ é soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicitá 2, il metodo fornisce una soluzione particolare della forma $y = Ax^2e^x$. Calcolando le derivate e sostituendo si ottiene $A = 1/4$ da cui l'integrale generale risulta

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + 1/4x^2e^x.$$

Non ci sono soluzioni che soddisfano la condizione richiesta.