Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica IIA
11 Settembre 2006

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**____________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare l'area della regione A del piano definita dalle limitazioni

$$y \geq x^2, \quad x \geq y^4.$$

2) Assegnata la forma differenziale lineare

$$\omega = e^{\frac{y-x}{y+x}} \left(1 - \frac{2xy}{(x+y)^2}\right) dx + \frac{2x^2}{(x+y)^2} e^{\frac{y-x}{y+x}} dy$$

si calcoli l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma \omega$$

dove γ é il tratto di iperbole $y = \dfrac{1}{x}$ per x compreso tra 1 e 2.

3) Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y' = \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + x^2\right)^2 - x^4$$

con la condizione $y(1) = 1/4$.

Svolgimento

1) Si ha $x,\ y \geq 0$ e tenendo conto che le due curve $y = x^2$ e $x = y^4$ si intersecano nei punti $(0,0)$ e $(1,1)$ si ha $x^2 \leq \sqrt[4]{x}$ e

$$\int\int_A dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt[4]{x}} dy = \int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x^2)dx = \frac{7}{15}.$$

2) Possiamo considerare l'insieme convesso $x, y > 0$. E' sufficente studiare la chiusura di ω. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{4xy^2}{(x+y)^4} e^{\frac{y-x}{y+x}} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

La forma differenziale risulta pertanto esatta. Le primitive, essendo X e Y omogenee di grado zero, sono date da

$$F(x,y) = xX + yY = xe^{\frac{y-x}{y+x}} + C.$$

Quindi

$$\int_\gamma \omega = F(2,1/2) - F(1,1) = 2e^{-3/5} - 1.$$

3) Possiamo supporre $x > 0,\ y > 0$. Si tratta di un'equazione di Bernoulli, infatti svolgendo i conti si ha

$$y' = \frac{y}{x} + 2\sqrt{x}x\sqrt{y}.$$

Dividendo per $\sqrt{y}$ si ottiene

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{x} + 2x\sqrt{x}.$$

Poniamo allora $z = \sqrt{y}$ da cui $z' = \frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}}$. Sostituendo otteniamo

$$z' = \frac{z}{2x} + x\sqrt{x}$$

che é un'equazione differenziale lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{1}{2x}}[\int x\sqrt{x}e^{-\int \frac{1}{2x}}dx + C] \\ &= e^{\frac{1}{2}\log x}[\int x^{3/2}e^{-\frac{1}{2}\log x} + C] = \sqrt{x}[\int xdx + C] = \frac{x^{5/2}}{2} + C\sqrt{x}. \end{aligned}$$

Allora si ottiene

$$\sqrt{y} = \frac{x^{5/2}}{2} + C\sqrt{x}.$$

Dalla condizione iniziale si ha $C = 0$ e pertanto la soluzione risulta

$$y = \frac{x^5}{4}.$$