Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
10 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = 3x + 2\sqrt{3}y + 1$$

sulla curva di equazione

$$9x^2 + 4y^2 = 36.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$y' + \frac{y}{x}(1 - x\sqrt{y}) = 0$$

con $y(1) = 1$.

3) Determinare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\frac{\pi y}{x} + \sqrt{2}|y|\right) dx + \left(\pi \log(xy) + \frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}x|y|}{y}\right) dy$$

sulla curva γ data da

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$$

orientata in senso antiorario.

Svolgimento

1) La curva é l'ellisse di centro l'origine e di semiassi 2 e 3 rispettivamente. Infatti si ha

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

e quindi una rappresentazione parametrica é data da

$$x = 2\cos t,\ y = 3\sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per il teorema di Weierstrass esistono sicuramente i massimi e i minimi assoluti perché si tratta di una funzione continua su un insieme compatto. Possiamo allora studiare la funzione ristretta alla curva ottenendo

$$f(t) = 6\cos t + 6\sqrt{3}\sin t + 1 \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo punto lo studio procede come per la determinazione dei massimi e minimi per funzioni di una variabile. Si ha

$$f'(t) = -6\sin t + 6\sqrt{3}\cos t = 6(-\sin t + \sqrt{3}\cos t)$$

e quindi

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \sqrt{3}\cos t \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{4\pi}{3}$$

e

$$f' > 0 \Leftrightarrow \tan t < \sqrt{3}.$$

I punti critici risultano allora $t = \frac{\pi}{3},\ t = \frac{4\pi}{3}$ da cui, considerando anche l'estremo $t = 0$ si ottengono le coppie

$$(2, 0),\ (1, \frac{3\sqrt{3}}{2}),\ (-1, -\frac{3\sqrt{3}}{2}).$$

Calcolando il valore della funzione si ha

$$f(2, 0) = 7,\ f(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}) = 13,\ f(-1, -\frac{3\sqrt{3}}{2}) = -11.$$

I punti $(1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$ e $(-1, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ sono allora il massimo ed il minimo assoluti rispettivamente.

2) Si ha

$$y' = -\frac{y}{x} + y^{3/2}$$

che é una equazione differenziale di Bernoulli. Possiamo considerare $x > 0$. Dividiamo allora per $y^{3/2}$ ottenendo

$$y'y^{-3/2} = -\frac{1}{x}y^{-1/2} + 1.$$

Poniamo

$$z = y^{-1/2} \leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}y^{-1/2-1}y'$$

e sostituendo si ha

$$z' = \frac{1}{2x}z - \frac{1}{2}$$

che é una equazione differenziale lineare del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva troviamo

$$z = e^{\int \frac{1}{2x}dx}\left[\int -\frac{1}{2}e^{-\int \frac{1}{2x}dx}dx + C\right] = e^{\frac{1}{2}\log x}\left[\int -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\log x}dx + C\right]$$

$$= \sqrt{x}[\int -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}dx + C] = \sqrt{x}[-\frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C]$$

$$= \sqrt{x}[\frac{1/2}{1/2-1}x^{-\frac{1}{2}+1} + C] = \frac{1/2}{1/2-1}x + C\sqrt{x}.$$

Quindi

$$y^{-1/2} = \frac{1/2}{1/2-1}x + C\sqrt{x}$$

da cui

$$y = (\frac{1/2}{1/2-1}x + C\sqrt{x})^{-2} = (-x + C\sqrt{x})^{-2}.$$

Dalla condizione iniziale si ha

$$y(1) = 1 = (-1 + C)^{-2} \Leftrightarrow (C-1)^2 = 1 \Leftrightarrow C = 0, C = 2.$$

Il valore $C = 0$ si deve scartare perché risulta

$$z = y^{-1/2} = -x$$

che é un valore negativo mentre la funzione z é positiva.

3) La forma differenziale lineare risulta definita nel primo e nel terzo quadrante aperti. La curva γ su cui si deve calcolare l'integrale curvilineo é una circonferenza di centro il punto $(1,1)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si trova quindi tutta immersa nel primo quadrante che é un insieme convesso. La forma ω é chiusa in tale insieme infatti considerando $y > 0$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\pi}{x} + \sqrt{2} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Pertanto in tale insieme risulta anche esatta. L'integrale curvilineo risulta quindi uguale a zero poiché la curva data é chiusa.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
10 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \pi x + 3y + 1$$

sulla curva di equazione

$$\pi^2 x^2 + 9y^2 = 9\pi^2.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$xy' = y(x\sqrt[4]{y^3} - 1)$$

con $y(1) = 2$.

3) Determinare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{3}y}{x} + |y|\right) dx + \left(\sqrt{3}\log(xy) + 1 + \frac{x|y|}{y}\right) dy$$

sulla curva γ data da

$$2x^2 + 2y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$$

orientata in senso antiorario.

Svolgimento

1) La curva é l'ellisse di centro l'origine e di semiassi 3 e π rispettivamente. Infatti si ha

$$\pi^2 x^2 + 9y^2 = 9\pi^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\pi^2} = 1$$

e quindi una rappresentazione parametrica é data da

$$x = 3\cos t,\ y = \pi \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per il teorema di Weierstrass esistono sicuramente i massimi e i minimi assoluti perché si tratta di una funzione continua su un insieme compatto. Possiamo allora studiare la funzione ristretta alla curva ottenendo

$$f(t) = 3\pi\cos t + 3\pi \sin t + 1 \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo punto lo studio procede come per la determinazione dei massimi e minimi per funzioni di una variabile. Si ha

$$f'(t) = -3\pi \sin t + 3\pi \cos t = 3\pi(-\sin t + \cos t)$$

e quindi

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{5\pi}{4}$$

e

$$f' > 0 \Leftrightarrow \tan t < 1.$$

I punti critici risultano allora $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$ da cui, considerando anche l'estremo $t = 0$, si ottengono le coppie

$$(3,0),\ (\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2}),\ (-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}).$$

Calcolando il valore della funzione si ha

$$f(3,0) = 3\pi + 1,\ f(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2}) = 3\pi\sqrt{2} + 1,\ f(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi\sqrt{2}}{2}) = -3\pi\sqrt{2} + 1.$$

I punti $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\pi\sqrt{2}}{2})$ sono allora il massimo ed il minimo assoluti rispettivamente.

2) Si ha, considerando $x > 0$

$$y' = -\frac{y}{x} + y^{7/4}$$

che é una equazione differenziale di Bernoulli. Dividiamo allora per $y^{7/4}$ ottenendo

$$y' y^{-7/4} = -\frac{1}{x} y^{-3/4} + 1.$$

Poniamo

$$z = y^{-3/4} \leftrightarrow z' = -\frac{3}{4}y^{-3/4-1}y'$$

e sostituendo si ha

$$z' = \frac{3}{4x}z - \frac{3}{4}$$

che é una equazione differenziale lineare del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva troviamo

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{3}{4x}dx}\left[\int -\frac{3}{4}e^{-\int \frac{3}{4x}dx}dx + C\right] = e^{\frac{3}{4}\log x}\left[\int -\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}\log x}dx + C\right] \\ &= x^{3/4}[\int -\frac{3}{4}\frac{1}{x^{3/4}}dx + C] = x^{3/4}[-\frac{3}{4}\frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + C] \\ &= x^{3/4}[\frac{3/4}{3/4-1}x^{-\frac{3}{4}+1} + C] = \frac{3/4}{3/4-1}x + Cx^{3/4}. \end{aligned}$$

Quindi

$$y^{-3/4} = \frac{3/4}{3/4-1}x + Cx^{3/4}$$

da cui

$$y = (\frac{3/4}{3/4-1}x + Cx^{3/4})^{-4/3} = (-3x + Cx^{3/4})^{-4/3}.$$

3) La forma differenziale lineare risulta definita nel primo e nel terzo quadrante aperti. La curva γ su cui si deve calcolare l'integrale curvilineo é una circonferenza di centro il punto $(-1,-1)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si trova quindi tutta immersa nel terzo quadrante che é un insieme convesso. La forma ω é chiusa in tale insieme infatti considerando $y < 0$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{x} - 1 = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Pertanto in tale insieme risulta anche esatta. L'integrale curvilineo risulta quindi uguale a zero poiché la curva data é chiusa.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
10 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \sqrt{3}x + \pi y + 1$$

sulla curva di equzione

$$3x^2 + \pi^2 y^2 = 3\pi^2.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$xy' + y(1 - x\sqrt{y^3}) = 0$$

con $y(1) = 3$.

3) Determinare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\frac{y}{|x|} + y\right) dx + \left(\log(xy) + \frac{\pi}{4} + |x|\right) dy$$

sulla curva γ data da

$$2x^2 + 2y^2 - 8x - 4y + 9 = 0$$

orientata in senso antiorario.

Svolgimento

1) La curva é l'ellisse di centro l'origine e di semiassi π e $\sqrt{3}$ rispettivamente. Infatti si ha

$$3x^2 + \pi^2 y^2 = 3\pi^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{3} = 1$$

e quindi una rappresentazione parametrica é data da

$$x = \pi \cos t,\ y = \sqrt{3} \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per il teorema di Weierstrass esistono sicuramente i massimi e i minimi assoluti perché si tratta di una funzione continua su un insieme compatto. Possiamo allora studiare la funzione ristretta alla curva ottenendo

$$f(t) = \sqrt{3}\pi \cos t + \sqrt{3}\pi \sin t + 1 \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo punto lo studio procede come per la determinazione dei massimi e minimi per funzioni di una variabile. Si ha

$$f'(t) = -\sqrt{3}\pi \sin t + \sqrt{3}\pi \cos t = \sqrt{3}\pi(-\sin t + \cos t)$$

e quindi

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \cos t \Leftrightarrow \tan t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4},\ t = \frac{5\pi}{4}$$

e

$$f' > 0 \Leftrightarrow \tan t < 1.$$

I punti critici risultano allora $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{5\pi}{4}$ da cui, considerando anche l'estremo $t = 0$, si ottengono le coppie

$$(\pi, 0),\ (\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}),\ (-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}).$$

Calcolando il valore della funzione si ha

$$f(\pi, 0) = \sqrt{3}\pi + 1,\ f(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}) = \pi\sqrt{3}\sqrt{2} + 1,\ f(-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{3}\pi\sqrt{2} + 1.$$

I punti $(\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2})$ e $(-\frac{\pi\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2})$ sono allora il massimo ed il minimo assoluti rispettivamente.

2) Si ha, considerando $x > 0$

$$y' = -\frac{y}{x} + y^{5/2}$$

che é una equazione differenziale di Bernoulli. Dividiamo allora per $y^{5/2}$ ottenendo

$$y' y^{-5/2} = -\frac{1}{x} y^{-3/2} + 1.$$

Poniamo

$$z = y^{-3/2} \leftrightarrow z' = -\frac{3}{2}y^{-3/2-1}y'$$

e sostituendo si ha

$$z' = \frac{3}{2x}z - \frac{3}{2}$$

che é una equazione differenziale lineare del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva troviamo

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{3}{2x}dx}\left[\int -\frac{3}{2}e^{-\int \frac{3}{2x}dx}dx + C\right] = e^{\frac{3}{2}\log x}\left[\int -\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}\log x}dx + C\right] \\ &= x^{3/2}[\int -\frac{3}{2}\frac{1}{x^{3/2}}dx + C] = x^{3/2}[-\frac{3}{2}\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C] \\ &= x^{3/2}[\frac{3/2}{3/2-1}x^{-\frac{3}{2}+1} + C] = \frac{3/2}{3/2-1}x + Cx^{3/2}. \end{aligned}$$

Quindi

$$y^{-3/2} = \frac{3/2}{3/2-1}x + Cx^{3/2}$$

da cui

$$y = (\frac{3/2}{3/2-1}x + Cx^{3/2})^{-2/3} = (3x + Cx^{3/2})^{-2/3}.$$

3) La forma differenziale lineare risulta definita nel primo e nel terzo quadrante privati dell'asse y. La curva γ su cui si deve calcolare l'integrale curvilineo é una circonferenza di centro il punto $(2,1)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si trova quindi tutta immersa nel primo quadrante che é un insieme convesso. La forma ω é chiusa in tale insieme infatti considerando $x > 0$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{1}{x} + 1 = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Pertanto in tale insieme risulta anche esatta. L'integrale curvilineo risulta quindi uguale a zero poiché la curva data é chiusa.

Università degli Studi di Perugia
Facoltà di Ingegneria
Corso di laurea in Ingegneria Civile
Prova scritta di Analisi Matematica II
10 Settembre 2007

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando adeguatamente i risultati.

1) Determinare i massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = 5x + \sqrt{3}y + 1$$

sulla curva di equazione

$$25x^2 + y^2 = 25.$$

2) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$xy' = -y(1 - x\sqrt[4]{y})$$

con $y(1) = 4$.

3) Determinare l'integrale curvilineo della forma differenziale lineare

$$\omega = \left(\frac{\sqrt{3}y}{|x|} + y\right) dx + \left(\sqrt{3}\log(xy) + \pi + |x|\right) dy$$

sulla curva γ data da

$$2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y + 9 = 0$$

orientata in senso antiorario.

Svolgimento

1) La curva é l'ellisse di centro l'origine e di semiassi 1 e 5 rispettivamente. Infatti si ha

$$25x^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{25} = 1$$

e quindi una rappresentazione parametrica é data da

$$x = \cos t, \;\; y = 5 \sin t \quad t \in [0, 2\pi].$$

Per il teorema di Weierstrass esistono sicuramente i massimi e i minimi assoluti perché si tratta di una funzione continua su un insieme compatto. Possiamo allora studiare la funzione ristretta alla curva ottenendo

$$f(t) = 5 \cos t + 5\sqrt{3} \sin t + 1 \quad t \in [0, 2\pi].$$

A questo punto lo studio procede come per la determinazione dei massimi e minimi per funzioni di una variabile. Si ha

$$f'(t) = -5 \sin t + 5\sqrt{3} \cos t = 5(-\sin t + \sqrt{3} \cos t)$$

e quindi

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin t = \sqrt{3} \cos t \Leftrightarrow \tan t = \sqrt{3} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}, \;\; t = \frac{4\pi}{3}$$

e

$$f' > 0 \Leftrightarrow \tan t < \sqrt{3}.$$

I punti critici risultano allora $t = \frac{\pi}{3}$, $t = \frac{4\pi}{3}$ da cui, considerando anche l'estremo $t = 0$, si ottengono le coppie

$$(1, 0), \;\; (1/2, \frac{5\sqrt{3}}{2}), \;\; (-1/2, -\frac{5\sqrt{3}}{2}).$$

Calcolando il valore della funzione si ha

$$f(1, 0) = 6, \;\; f(1/2, \frac{5\sqrt{3}}{2}) = 11, \;\; f(-1/2, -\frac{5\sqrt{3}}{2}) = -9.$$

I punti $(1/2, \frac{5\sqrt{3}}{2})$ e $(-1/2, -\frac{5\sqrt{3}}{2})$ sono allora il massimo ed il minimo assoluti rispettivamente.

2) Si ha, considerando $x > 0$

$$y' = -\frac{y}{x} + y^{5/4}$$

che é una equazione differenziale di Bernoulli. Dividiamo allora per $y^{5/4}$ ottenendo

$$y'y^{-5/4} = -\frac{1}{x} y^{-1/4} + 1.$$

Poniamo
$$z = y^{-1/4} \leftrightarrow z' = -\frac{1}{4} y^{-1/4-1} y'$$
e sostituendo si ha
$$z' = \frac{1}{4x} z - \frac{1}{4}$$
che é una equazione differenziale lineare del primo ordine. Utilizzando la formula risolutiva troviamo
$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{1}{4x} dx} \left[\int -\frac{1}{4} e^{-\int \frac{1}{4x} dx} dx + C \right] = e^{\frac{1}{4}\log x} \left[\int -\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}\log x} dx + C \right] \\ &= x^{1/4} [\int -\frac{1}{4} \frac{1}{x^{1/4}} dx + C] = x^{1/4} [-\frac{1}{4} \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C] \\ &= x^{1/4} [\frac{1/4}{1/4-1} x^{-\frac{1}{4}+1} + C] = \frac{1/4}{1/4-1} x + C x^{1/4}. \end{aligned}$$
Quindi
$$y^{-1/4} = \frac{1/4}{1/4-1} x + C x^{1/4}$$
da cui
$$y = (\frac{1/4}{1/4-1} x + C x^{1/4})^{-4} = (-\frac{1}{3} x + C x^{1/4})^{-4}.$$

3) La forma differenziale lineare risulta definita nel primo e nel terzo quadrante privati dell'asse y. La curva γ su cui si deve calcolare l'integrale curvilineo é una circonferenza di centro il punto $(1, 2)$ e raggio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si trova quindi tutta immersa nel primo quadrante che é un insieme convesso. La forma ω é chiusa in tale insieme infatti considerando $x > 0$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{x} + 1 = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$
Pertanto in tale insieme risulta anche esatta. L'integrale curvilineo risulta quindi uguale a zero poiché la curva data é chiusa.