UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 29.09.2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Studiare l'esattezza della forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{y+x}{x^2+y^2}dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}dy$$

nel suo dominio di definizione. Calcolare poi l'integrale curvilineo sulla frontiera del quadrato di vertici $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$, $(1,1)$.

2. Calcolare

$$\int\int_T \frac{x+2y}{x^2+y^2}dxdy$$

dove T é la regione del piano compresa tra le circonferenze centrate nell'origine e di raggi 1 e $\sqrt{3}$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2x(1+x^2)y' - 4y + y^2 = 0 \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é ben definita nell'insieme $I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Controlliamo se la forma differenziale é chiusa. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y(y+x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

e quindi la forma é chiusa. Per controllare l'esattezza calcoliamo l'integrale della forma differenziale lineare su una curva chiusa che circonda l'origine ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \frac{y+x}{x^2+y^2}dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}dy = \int_0^{2\pi} (\sin t + \cos t)(-\sin t) + (\sin t - \cos t)\cos t dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \sin t \cos t + \sin t \cos t - \cos^2 t)dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

La forma differenziale lineare quindi non é esatta. Considerando poi il semipiano $y > 0$, l'integrale curvilineo viene zero, essendo ω esatta perché chiusa in un insieme convesso.

2. Usando le coordinate polari il dominio T diventa

$$T' = \{1 \le \varrho \le \sqrt{3}, \quad 0 \le t \le 2\pi\}.$$

Allora

$$\int\int_T \frac{x+2y}{x^2+y^2}dxdy = \int\int_{T'} \frac{\varrho\cos t + 2\varrho \sin t}{\varrho^2}\varrho d\varrho dt$$
$$= \int\int_{T'} (\cos t + 2\sin t)d\varrho dt = \int_1^{\sqrt{3}} d\varrho \int_0^{2\pi} (\cos t + 2\sin t)dt$$
$$= (\sqrt{3}-1)[\sin t - 2\cos t]_0^{2\pi} = 0.$$

3. Possiamo scrivere

$$y^{-2}y' = \frac{2y^{-1}}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2x(1+x^2)}.$$

Ponendo $y^{-1} = z$ si ha $-y^{-2}y' = z'$ e quindi otteniamo

$$-y^{-2}y' = -\frac{2y^{-1}}{x(1+x^2)} + \frac{1}{2x(1+x^2)} \Leftrightarrow z' = -\frac{2z}{x(1+x^2)} + \frac{1}{2x(1+x^2)}$$

che é un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$z = e^{-\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx}[\int \frac{1}{2x(1+x^2)} e^{\int \frac{2}{x(1+x^2)}dx} dx + C].$$

Calcoliamo ora l'integrale considerando $x > 0$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int (\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2})dx = \log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Allora

$$\begin{aligned} & z = e^{-2(\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2))}[\int \frac{1}{2x(1+x^2)} e^{2(\log x - \frac{1}{2}\log(1+x^2))} dx + C] \\ = \ & e^{\log \frac{1+x^2}{x^2}}[\int \frac{1}{2x(1+x^2)} e^{\log \frac{x^2}{1+x^2}} dx + C] = \frac{1+x^2}{x^2}[\int \frac{1}{2x(1+x^2)} \frac{x^2}{1+x^2} dx + C] \\ = \ & \frac{1+x^2}{x^2}[\frac{1}{2}\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx + C] = \frac{1+x^2}{x^2}[-\frac{1}{4(1+x^2)} + C] \\ = \ & -\frac{1}{4x^2} + C\frac{1+x^2}{x^2} \end{aligned}$$

da cui

$$y = \frac{x^2}{-\frac{1}{4} + C(x^2+1)}.$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(1) = 1 = \frac{1}{-\frac{1}{4} + 2C} \Leftrightarrow 1 = -\frac{1}{4} + 2C$$

da cui

$$C = \frac{5}{8}.$$