UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 21.01.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare le relazioni tra le costanti A, B, C, D che rendono chiusa la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{Ax + By}{2x^2 + y^2}dx + \frac{Cx + Dy}{2x^2 + y^2}dy$$

nel suo dominio di definizione. Studiare poi l'esattezza.

2. Calcolare

$$\int\int_T x\sqrt{y^2 - x^2}\,dxdy$$

dove T é il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1), (1,1)$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} y = \cos x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é ben definita nell'insieme $I\!R^2\setminus\{(0,0)\}$. Controlliamo se la forma differenziale é chiusa. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{2Bx^2-By^2-2Axy}{(2x^2+y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{Cy^2-2Cx^2-4Dxy}{(2x^2+y^2)^2}$$

e quindi la forma é chiusa se si ha

$$B=-C,\ \ A=2D.$$

Per controllare l'esattezza calcoliamo l'integrale della forma differenziale lineare su una curva chiusa che circonda l'origine ad esempio $\gamma(t)=((1/\sqrt{2})\cos t,\sin t)\quad t\in[0,2\pi]$

$$\int_\gamma \omega=\int_0^{2\pi}(\frac{\sqrt{2}D\cos t-C\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t)+\frac{(C/\sqrt{2})\cos t+D\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}\cos t)dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\frac{C}{\sqrt{2}}dt=2\pi\frac{C}{\sqrt{2}}.$$

La forma differenziale lineare quindi é esatta solo se $C=0$.

2. E' conveniente vedere l'insieme come dominio normale rispetto all'asse y e quindi

$$T=\{(x,y):0\le y\le 1,\quad 0\le x\le y\}.$$

Allora si ha

$$\int\int_T x\sqrt{y^2-x^2}dxdy=\int_0^1 dy\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}dx$$
$$=\int_0^1 dy\left(-\frac{1}{2}\int_0^y -2x\sqrt{y^2-x^2}dx\right)=-\frac{1}{2}\int_0^1 dy\left[\frac{2}{3}(y^2-x^2)^{3/2}\right]_0^y$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{2}{3}\int_0^1 -(y^2)^{3/2}dy=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3dy=\frac{1}{12}.$$

3. Si tratta di un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx}\left[\int \cos x e^{\int \frac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}dx} dx + C\right] \\ &= e^{-\log(1+\sin^2 x)}\left[\int \cos x e^{\log(1+\sin^2 x)} dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 x}\left[\int \cos x (1+\sin^2 x) dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 x}\left[\int (\cos x + \cos x \sin^2 x) dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+\sin^2 x}\left[\sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + C\right]. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{3} + C) \Leftrightarrow 2 = \frac{4}{3} + C$$

da cui

$$C = \frac{2}{3}.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 21.01.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare le relazioni tra le costanti A, B, C, D che rendono chiusa la forma differenziale lineare

$$\omega(x,y) = \frac{Ax+By}{x^2+2y^2}dx + \frac{Cx+Dy}{x^2+2y^2}dy$$

nel suo dominio di definizione. Studiare poi l'esattezza.

2. Calcolare

$$\int\int_T x\sqrt{y^2-x^2}dxdy$$

dove T é il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1), (1,1)$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{1}{1+e^{-x}}y = x \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Svolgimento

1. La forma differenziale lineare é ben definita nell'insieme $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Controlliamo se la forma differenziale é chiusa. Si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{Bx^2 - 2By^2 - 4Axy}{(x^2+2y^2)^2}$$

e

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{2Cy^2 - Cx^2 - 2Dxy}{(x^2+2y^2)^2}$$

e quindi la forma é chiusa se si ha

$$B = -C, \;\; 2A = D.$$

Per controllare l'esattezza calcoliamo l'integrale della forma differenziale lineare su una curva chiusa che circonda l'origine ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, (1/\sqrt{2}) \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} \left(\frac{A\cos t + \frac{B}{\sqrt{2}} \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} (-\sin t) + \frac{-B\cos t + \sqrt{2} A \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{B}{\sqrt{2}} dt = -2\pi \frac{B}{\sqrt{2}}.$$

La forma differenziale lineare quindi é esatta solo se $B = 0$.

2. E' conveniente vedere l'insieme come dominio normale rispetto all'asse y e quindi

$$T = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y\}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} & \int\int_T x\sqrt{y^2-x^2} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^y x\sqrt{y^2-x^2} dx \\ = \;& \int_0^1 dy \left(-\frac{1}{2} \int_0^y -2x\sqrt{y^2-x^2} dx \right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 dy \left[\frac{2}{3} (y^2-x^2)^{3/2} \right]_0^y \\ = \;& -\frac{1}{2}\frac{2}{3} \int_0^1 -(y^2)^{3/2} dy = \frac{1}{3} \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

3. Si tratta di un'equazione lineare. Dalla formula risolutiva si ha

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx}\left[\int xe^{\int \frac{1}{1+e^{-x}}dx}dx + C\right] \\ &= e^{-\log(1+e^x)}\left[\int xe^{\log(1+e^x)}dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+e^x}\left[\int x(1+e^x)dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\int (xe^x + x)dx + C\right] \\ &= \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} + xe^x - \int e^x dx + C\right] = \frac{1}{1+e^x}\left[\frac{x^2}{2} + xe^x - e^x + C\right]. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(0) = 2 = \frac{1}{2}(-1+C) \Leftrightarrow 4 = C - 1$$

da cui

$$C = 5.$$