UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 18.02.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Determinare l'integrale curvilineo rispetto al differenziale della coordinata y della funzione

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x(x + y)}$$

sull'arco di circonferenza del primo quadrante di centro l'origine e raggio 1 e compreso tra le rette $y = 0$ e $y = x$.

2. Data la funzione

$$f(x, y) = x^5 + x^4y + x^4 - xy^4 - y^5 - y^4 + 1$$

stabilire se l'origine é un punto critico e, in caso affermativo, determinare se é punto di massimo o di minimo.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \dfrac{3}{x-2}y = \dfrac{1}{x^2 - 4}\sqrt[3]{y^2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Le equazioni parametriche dell'arco di circonferenza γ, sono date da:

$$\varphi(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, \pi/4].$$

Risulta quindi:

$$\int_\gamma \frac{x-y}{x(x+y)} dy = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t(\cos t + \sin t)} \cos t dt$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t} dt = [\log(\cos t + \sin t)]_0^{\pi/4} = \log \sqrt{2}.$$

2. Risulta:

$$\nabla f(x,y) = (5x^4 + 4x^3 y + 4x^3 - y^4,\ x^4 - 4xy^3 - 5y^4 - 4y^3),$$

pertanto il punto $(0,0)$ é un punto critico di f. E' inoltre immediato osservare che l'Hessiano $H(0,0)$ é nullo, pertanto non possiamo dedurre nulla sulla natura del punto critico. Tuttavia, si ha $f(0,0) = 1$, mentre se restringiamo la funzione f alla semiretta positiva dell'asse delle x, si ha $f(x,0) = x^5 + x^4 + 1 > 1$ e se restringiamo f alla semiretta positiva dell'asse y si ha $f(0,y) = -y^5 - y^4 + 1 < 1$. Siccome in ogni intorno dell'origine cadono punti del tipo $(x,0), (0,y)$ con $x > 0$ e $y > 0$ rispettivamente, si vede subito che l'origine é un punto di sella.

3. Si tratta di un'equazione di Bernoulli. Ponendo $z = y^{1/3}$ si ottiene l'equazione differenziale

$$z' + \frac{1}{x-2} z = \frac{1}{3(x^2-4)}.$$

Dalla formula risolutiva delle equazioni lineari del primo ordine si ha, considerando $0 < x < 2$

$$z = e^{-\int \frac{1}{x-2} dx} \left[\int \frac{1}{3(x^2-4)} e^{\int \frac{1}{x-2} dx} dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{|x-2|} \left[\int \frac{1}{3(x^2-4)} |x-2| dx + C \right] = \frac{1}{2-x} \left[-\int \frac{1}{3(x+2)} dx + C \right]$$
$$= \frac{1}{2-x} \left[-\frac{1}{3} \log(x+2) + C \right] = \frac{1}{3(x-2)} \log(x+2) + \frac{C}{2-x}.$$

Risolvendo rispetto ad y otteniamo

$$y(x) = \left(\frac{1}{3(x-2)} \log(x+2) + \frac{C}{2-x} \right)^3 .$$

Imponendo la condizione iniziale si ha

$$y(1) = 1 = (\frac{-1}{3} \log 3 + C)^3 \Leftrightarrow 1 + \frac{\log 3}{3} = C.$$