UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma xe^z ds$$

dove γ é il segmento in $I\!R^3$ che unisce i punti $(1,1,0)$ e $(2,2,1)$.

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (xe^y, -e^y + 4y + x)$$

uscente dalla frontiera dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi 1 e 2.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{16}{x}y - 8x^6 e^{x^3} \sqrt[4]{y^3} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. L'equazione parametrica del segmento che unisce i punti dati risulta

$$\begin{cases} x(t) = (1-t) + 2t = 1+t \\ y(t) = (1-t) + 2t = 1+t \\ z(t) = (1-t)0 + t = t \end{cases}$$

per $t \in [0,1]$. Pertanto l'integrale diventa, considerando che $ds = \sqrt{3}dt$,

$$\int_\gamma xe^z ds = \sqrt{3}\int_0^1 (1+t)e^t dt = \sqrt{3}\int_0^1 (e^t + te^t)dt = \sqrt{3}e.$$

2. Utilizzando il teorema della divergenza si ha che il flusso si calcola, indicando con D la parte interna dell'ellisse, con l'integrale

$$\int\int_D (div\Omega)dxdy = \int\int_D (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})dxdy = \int\int_D 4dxdy = 8\pi.$$

3. Si tratta di un'equazione di Bernoulli.

$$y' = \frac{16}{x}y - 8x^6 e^{x^3}\sqrt[4]{y^3}$$

con $s = \frac{3}{4}$. Ponendo allora $z = y^{1/4}$ otteniamo l'equazione lineare

$$z' = \frac{4}{x}z - 2x^6 e^{x^3}.$$

Per la soluzione si ha

$$\begin{aligned} z &= e^{\int \frac{4}{x}dx}\Big[\int -2x^6 e^{x^3} e^{-\int \frac{4}{x}dx}dx + C\Big] = x^4[\int -2x^2 e^{x^3}dx + C] \\ &= -\frac{2}{3}x^4 e^{x^3} + Cx^4 \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$y(x) = \Big(-\frac{2}{3}x^4 e^{x^3} + Cx^4\Big)^4.$$

Dal dato iniziale si ricava poi $C = 1 + \frac{2}{3}e$. La soluzione finale risulta quindi

$$y = \Big(-\frac{2}{3}x^4 e^{x^3} + (1 + \frac{2}{3}e)x^4\Big)^4.$$

UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 17.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma y e^x ds$$

dove γ é il segmento in $I\!R^3$ che unisce i punti $(0,0,1)$ e $(2,3,5)$.

2. Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\Omega(x,y) = (\sin x + y^2, -y\cos x + 2y)$$

uscente dalla frontiera del disco di centro $(0,1)$ e raggio 2.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' = 8y + 16x^4 e^{x^2}\sqrt[4]{y^3} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. L'equazione parametrica del segmento che unisce i punti dati risulta

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)0 + 2t = 2t \\ y(t) = (1-t)0 + 3t = 3t \\ z(t) = (1-t) + 5t = 1 + 4t \end{cases}$$

per $t \in [0,1]$. Pertanto l'integrale diventa, considerando che $ds = \sqrt{29}dt$,

$$\int_\gamma ye^x ds = \sqrt{29}\int_0^1 3te^{2t}dt = 3\sqrt{29}\int_0^1 te^{2t}dt = \sqrt{29}\frac{3}{4}(e^2+1).$$

2. Utilizzando il teorema della divergenza si ha che il flusso si calcola, indicando con D il disco, con l'integrale

$$\int\int_D (div\Omega)dxdy = \int\int_D (\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y})dxdy = \int\int_D 2dxdy = 8\pi.$$

3. Assumendo $x > 0$ e dividendo per x, otteniamo l'equazione di Bernoulli

$$y' = \frac{8}{x}y + 16x^3e^{x^2}\sqrt[4]{y^3}$$

con $s = \frac{3}{4}$. Ponendo allora $z = y^{1/4}$ otteniamo l'equazione lineare

$$z' = \frac{2}{x}z + 4x^3e^{x^2}.$$

Per la soluzione si ha

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int 4x^3e^{x^2}e^{-\int \frac{2}{x}dx}dx + C\right] = x^2[\int 4xe^{x^2}dx + C]$$
$$= 2x^2e^{x^2} + Cx^2$$

da cui si ottiene

$$y(x) = \left(2x^2e^{x^2} + Cx^2\right)^4.$$

Dal dato iniziale si ricava poi $C = 1 - 2e$. La soluzione finale risulta quindi

$$y = \left(2x^2e^{x^2} + (1-2e)x^2\right)^4.$$