UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 16.06.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso______________ **Matricola**____________________________

Votazione ______________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare la lunghezza dell'arco di curva definito da $y = x^{2/3}$ con $x \in [1, 8]$.

2. Calcolare il volume del solido che giace sotto il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e sopra la regione del piano xy limitato dalla retta $y = 2x$ e dalla parabola $y = x^2$.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{2}{x+3}y - \frac{x}{x^2-9} = 0 \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Una parametrizzazione della curva é data da $\gamma(t) = (t, t^{2/3})$ con $t \in [1,8]$, da cui otteniamo $\gamma'(t) = (1, \frac{2}{3}t^{-1/3})$.
Si ha, con la sostituzione $u = 9t^{2/3} + 4 \Leftrightarrow dt = \frac{1}{18}\sqrt{u-4}$

$$\int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}t^{-2/3}}dt = \int_1^8 \frac{\sqrt{9t^{2/3}+4}}{3t^{1/3}}dt = \int_{13}^{40} \frac{1}{18}\sqrt{u}du$$
$$= \frac{1}{18}\frac{2}{3}\Big[u^{3/2}\Big]_{13}^{40} = \frac{1}{27}(40\sqrt{40} - 13\sqrt{13}).$$

2. L'insieme su cui si deve integrare é dato da

$$T = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ x^2 \le y \le 2x\}.$$

Si ha

$$\int\int_T (x^2+y^2)dxdy = \int_0^2 dx \int_{x^2}^{2x} (x^2+y^2)dy$$
$$= \int_0^2 \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{x^2}^{2x} dx = \int_0^2 2x^3 + \frac{8}{3}x^3 - x^4 - \frac{x^6}{3}dx$$
$$= \left[\frac{2}{4}x^4 + \frac{8}{12}x^4 - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right]_0^2 = \frac{216}{35}.$$

3. Si ha un'equazione lineare del primo ordine

$$y' = -\frac{2}{x+3}y + \frac{x}{x^2-9}$$

e dalla formula risolutiva otteniamo

$$y = e^{-\int \frac{2}{x+3}dx}\left[\int \frac{x}{x^2-9}e^{\int \frac{2}{x+3}dx}dx + C\right] = e^{-2\log|x+3|}\left[\int \frac{x}{x^2-9}e^{2\log|x+3|}dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}\left[\int \frac{x}{x^2-9}(x+3)^2dx + C\right] = \frac{1}{(x+3)^2}\left[\int \frac{x(x+3)}{x-3}dx + C\right]$$
$$= \frac{1}{(x+3)^2}\left[\int (x + 6 + \frac{18}{x-3})dx + C\right] = \frac{1}{(x+3)^2}\left[\frac{x^2}{2} + 6x + 18\log|x-3| + C\right].$$

Imponendo la condizione iniziale otteniamo

$$y(2) = 1 = \frac{1}{25}(2 + 12 + C) \Leftrightarrow 25 = 14 + C$$

da cui

$$C = 11.$$