UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 11.09.2008

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Assegnata la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{(x^2+y^2)^5}}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

stabilire se é continua, parzialmente derivabile e differenziabile.

2. Utilizzando le formule di Green, calcolare l'area dell'ellisse di centro $(0,0)$ e semiassi π e $\sqrt{2}$.

3. Trovare l'integrale generale dell' equazione differenziale

$$(3x+1)y'' - 6y' = 27(3x+1)^3$$

e determinare poi tutte le soluzioni il cui grafico passa per l'origine.

Svolgimento

1. Sull'insieme $A = I\!\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$ la f é di classe $C^1(A)$, pertanto essa risulta differenziabile e quindi continua e parzialmente derivabile. Verifichiamo cosa accade nell'origine. Passando alle coordinate polari, si ha facilmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\sqrt{(x^2+y^2)^5}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\sin\varrho^5}{\varrho} = 0.$$

Pertanto la funzione é continua nell'origine poiché c'é uniformitá rispetto a θ. Verifichiamo ora l'esistenza delle derivate parziali nell'origine. Si ha immediatamente

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin|t|^5}{|t|} = 0,$$

ed analogamente per la derivata rispetto ad y. Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Controlliamo infine la differenziabilitá. Se f é differenziabile in $(0,0)$, utilizzando la definizione, deve esistere una funzione infinitesima $\varepsilon(h,k)$ per $(h,k)\to(0,0)$, tale che

$$f(h,k) - f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot(h,k) + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k),$$

cioé

$$\frac{\sin(h^2+k^2)^{5/2}}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \varepsilon(h,k).$$

Ció é soddisfatto, quindi la f é differenziabile anche nell'origine.

2. Utilizzando le note formule per l'area, conseguenze delle formule di Green, indicata con C l'ellisse, si ha

$$\text{Area}(C) = \frac{1}{2}\int_{+FrC} x\,dy - y\,dx.$$

Ora le equazioni parametriche di $+FrC$ sono: $x(t) = \pi\cos t$, $y(t) = \sqrt{2}\sin t$, $t\in[0,2\pi]$ da cui

$$\text{Area}(C) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(\pi\cos t)\sqrt{2}\cos t + (\sqrt{2}\sin t)\pi\sin t]dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\pi\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\pi^2.$$

3. Normalizzando l'equazione, supponendo $3x+1 \neq 0$, si ha

$$y'' - \frac{6}{3x+1} y' = 27(3x+1)^2.$$

Consideriamo l'equazione omogenea. Una soluzione immediata dell'equazione omogenea é la funzione $u_1(x) = 1$, per ogni x. Per trovare una seconda soluzione indipendente, si puó procedere con la ben nota formula integrale risolutiva, oppure si puó porre $z = y'$, da cui si ottiene una equazione lineare omogenea del primo ordine che puó essere risolta anche come una equazione a variabili separabili. Si ottiene facilmente una seconda soluzione indipendente $u_2(x) = (3x+1)^3$. pertanto l'integrale dell'equazione omogenea associata é dato da:

$$u(x) = c_1 + c_2(3x+1)^3.$$

Per la soluzione particolare, utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Cioé troviamo una soluzione particolare del tipo

$$\overline{y}(x) = u_1(x)v_1(x) + u_2(x)v_2(x),$$

dove, indicato il termine noto con $f(x)$ e con $W(x)$ la matrice wronskiana di u_1 e u_2, il cui determinante é dato da $9(3x+1)^2$,

$$v_1(x) = -\int f(x)u_2(x)(detW(x))^{-1}dx = -\int 3(3x+1)^3 dx = -\frac{1}{4}(3x+1)^4$$

e

$$v_2(x) = \int f(x)u_1(x)(detW(x))^{-1}dx = \int 3dx = 3x+1,$$

ove la costante additiva 1 é stata aggiunta per comoditá. Si ottiene allora

$$\overline{y}(x) = \frac{3}{4}(3x+1)^4,$$

e l'integrale generale

$$y(x) = c_1 + c_2(3x+1)^3 + \frac{3}{4}(3x+1)^4.$$

Ora le soluzioni che passano per l'origine si ottengono facilmente imponendo la condizione $y(0) = 0$. Esse sono tutte quelle per cui vale la relazione

$$c_1 + c_2 = -\frac{3}{4},$$

cioé

$$y(x) = c - (c + 3/4)(3x + 1)^3 + \frac{3}{4}(3x + 1)^4,$$

con c costante arbitraria.