UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 09.09.2009

Cognome ______________________________ **Nome** ____________________

Anno di corso_____________ **Matricola**___________________________

Votazione _____________

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare
$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$$
dove D é la regione del piano nel primo quadrante compresa fra le rette di equazione $x+y=1$ e $x+y=4$.

2. Determinare i massimi e minimi relativi della funzione
$$f(x,y)=(x^2-y)(y^2-1).$$

3. Trovare le soluzioni $y \in C^2$ dell'equazione differenziale
$$2y''-3y'+y=f(x)$$
dove
$$f(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \sin x & x \geq 0 \end{cases}$$
tali che
$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = 0.$$

Svolgimento

1. Calcoliamo l'integrale doppio passando a coordinate polari. Si ha che l'insieme D si trasforma in $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ e $\frac{1}{\cos t + \sin t} \leq \varrho \leq \frac{4}{\cos t + \sin t}$ e quindi

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \int_{\frac{1}{\cos t+\sin t}}^{\frac{4}{\cos t+\sin t}} d\varrho$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt \Big[\frac{4}{\cos t + \sin t} - \frac{1}{\cos t + \sin t}\Big] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos t + \sin t} dt.$$

Utilizzando la sostituzione $\tan \frac{t}{2} = z$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{\cos t + \sin t} dt = -6 \int_0^1 \frac{1}{z^2 - 2z - 1} dz = -6 \int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2 - 2} dz.$$

Ponendo ora $v = z - 1$ si ha

$$-6 \int_0^1 \frac{1}{(z-1)^2 - 2} dz = -6 \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2 - 2} dv.$$

Scomponendo l'integranda si ha

$$-6 \int_{-1}^0 \frac{1}{v^2-2} dv = -6 \int_{-1}^0 \Big(\frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{v - \sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{v + \sqrt{2}}\Big) dv$$

e quindi otteniamo

$$\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy = -\frac{3}{\sqrt{2}} \log \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

2. La funzione é di classe C^∞ definita su tutto il piano e quindi i punti di massimo e minimo si trovano tra quelli che annullano il gradiente. Si ha

$$f'_x = 2x(y^2 - 1), \quad f'_y = 2x^2 y - 3y^2 + 1$$

e la soluzione del sistema é data dai punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}), (\pm 1, 1)$. I punti $(\pm 1, 1)$ poiché $f(\pm 1, 1) = 0$ e analizzando il segno della funzione, risultano essere di sella. Analizziamo ora i punti $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{3}})$. Si ha

$$f''_{xx} = 2y^2 - 2, \ f''_{xy} = 4xy = f''_{yx}, \ f''_{yy} = 2x^2 - 6y$$

e considerando la matrice Hessiana si ottiene che

$$H(0,\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{8}{\sqrt{3}},\ H(0,-\frac{1}{\sqrt{3}})=-\frac{8}{\sqrt{3}}.$$

Nel primo caso poiché $f''_{xx}<0$ il punto é di massimo nel secondo é punto sella.

3. Si tratta di un'equazione lineare del secondo ordine. L'equazione caratteristica risulta essere

$$2\lambda^2-3\lambda+1=0$$

le cui radici sono $\lambda=1,\frac{1}{2}$ Risolviamo separatamente per $x<0$ e per $x\geq 0$. Per $x<0$ l'equazione é omogenea e otteniamo che l'integrale generale é dato da

$$y_1=C_1e^x+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

Per $x\geq 0$ poiché $\lambda=i$ non é una soluzione poniamo $y=A\cos x+B\sin x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene facilmente

$$A=\frac{3}{10},\ B=-\frac{1}{10}.$$

Pertanto per $x\geq 0$ l'integrale generale é dato da

$$y=C_3e^x+C_4e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x.$$

Poiché le soluzioni devono essere di classe C^2 occorrono condizioni di raccordo in $x=0$. Si ha facilmente

$$C_2=C_4+\frac{4}{5},\ C_1=C_3-\frac{1}{2}.$$

Quindi l'integrale generale su $I\!R$ risulta

$$y=\begin{cases}(C_3-\frac{1}{2})e^x+(C_4+\frac{4}{5})e^{\frac{x}{2}} & x<0\\ C_3e^x+C_4e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{10}\cos x-\frac{1}{10}\sin x & x\geq 0.\end{cases}$$

Imponendo infine le condizioni si ha che la condizione $\lim_{x\to-\infty}y=0$ é sempre soddisfatta mentre la condizione $\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=0$ é soddisfatta per $C_3=C_4=0$.