UNIVERSITÁ DEGLI STUDI DI PERUGIA
Facoltá di Ingegneria - C.L. Edile-Architettura
Prova scritta di ANALISI MATEMATICA II
Prova del 02.07.2008

Svolgere i seguenti esercizi, motivando le risposte.

1. Calcolare l'integrale
$$\int\int\int_E \frac{z-2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz$$
dove
$$E = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 2 - \sqrt{4-x^2-y^2}\}.$$

2. Stabilire se il campo vettoriale
$$\Omega(x,y,z) = (2xy + \cos z, x^2 - \frac{e^y}{z}, \frac{e^y}{z^2} - x\sin z)$$
é conservativo sul semispazio $z < 0$ ed in caso affermativo determinare i potenziali.

3. Trovare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} xy'' - 5y' + \frac{8}{x}y = x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 1. \end{cases}$$

Svolgimento

1. Usando le coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \varrho \cos t \\ y = \varrho \sin t \\ z = z. \end{cases}$$

si ha che l'insieme E si trasforma nell'insieme E' definito da

$$1 \leq \varrho \leq 2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 2 - \sqrt{4 - \varrho^2}.$$

Allora otteniamo

$$\begin{aligned}
& \int\int\int_E \frac{z-2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdydz = \int\int\int_{E'} \frac{z-2}{\varrho} \varrho d\varrho dt dz \\
= & \int\int\int_{E'} (z-2) d\varrho dt dz = \int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} d\varrho dt \int_0^{2-\sqrt{4-\varrho^2}} (z-2)dz \\
= & \frac{1}{2}\int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} d\varrho dt [(z-2)^2]_0^{2-\sqrt{4-\varrho^2}} = \frac{1}{2}\int\int_{[1,2]\times[0,2\pi]} (4-\varrho^2-4) d\varrho dt \\
= & \frac{2\pi}{2}\int_1^2 (-\varrho^2) d\varrho = \pi[-\frac{\varrho^3}{3}]_1^2 = \frac{-7\pi}{3}.
\end{aligned}$$

2. Il campo vettoriale é ben definito nel semispazio $z < 0$ che risulta convesso. Controlliamo se la forma differenziale associata é chiusa, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} = -\sin z = \frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{e^y}{z^2} = \frac{\partial Z}{\partial y}$$

quindi la forma é chiusa perció é esatta perché definita sul semispazio. Calcoliamo ora una primitiva F. Deve risultare $\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + \cos z$ e quindi

$$F(x, y, z) = \int (2xy + \cos z) dx = x^2 y + x \cos z + C(y, z).$$

Derivando rispetto a y otteniamo

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + \frac{\partial C}{\partial y} = x^2 - \frac{e^y}{z}$$

da cui

$$\frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{e^y}{z} \Leftrightarrow C(y,z) = -\frac{e^y}{z} + g(z)$$

e quindi

$$F(x,y,z) = x^2 y + x\cos z - \frac{e^y}{z} + g(z).$$

Infine, per determinare g,

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -x\sin z + \frac{e^y}{z^2} + g'(z) = \frac{e^y}{z^2} - x\sin z$$

da cui

$$g'(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) = c.$$

Quindi

$$F(x,y,z) = x^2 y + x\cos z - \frac{e^y}{z} + c.$$

3. Moltiplicando per x otteniamo

$$x^2 y'' - 5xy' + 8y = x^3$$

che é un'equazione equidimensionale di Eulero. Ponendo $x = e^t$ si ha l'equazione

$$y'' - 6y' + 8y = e^{3t}.$$

Consideriamo l'equazione omogenea. L' integrale generale é

$$y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{2t}.$$

Per la soluzione particolare, utilizzando i metodi standard con $\beta(t) = e^{3t}$, si ottiene l'integrale particolare $y = -e^{3t}$. Quindi l'interale generale dell'equazione assegnata risulta

$$C_1 x^4 + C_2 x^2 - x^3.$$

Dalle condizioni iniziali si ottiene infine

$$y = x^4 - x^3.$$